# ZEITSCHRIFT

FÜR

# PHYSIK UND MATHEMATIK.

## I.

## Beschreibung der Amalgamation der Silbererze zu Arany-Idka;

von

Dr. *Wehrle*, k. k. Bergrath und Prof. in Schemnitz.

Der Zweck der Amalgamation ist die Gewinnung des Silbers der Silbererze; sie unterscheidet sich von der Eintränk- oder Verbleiarbeit darin, daſs sie als Auflösungsmittel Quecksilber anwendet, und daſs die Auflösung des Silbers schon bei einer Temperatur von 40° *R.* erfolgt, dagegen die Auflösung des Silbers mittelst Blei erst dann Statt findet, wenn die Erze geschmolzen sind, auch entzieht das Blei den Sulfuriden (Lechen, Steinen) das Silber nie vollständig, daher diese einer gleichen Behandlung wiederholt unterzogen werden müssen, dagegen das Quecksilber den Erzen bis auf drei Denär oder ein Quintchen im Centner das Silber vollständig entzieht, endlich ist die Trennung des Silbers vom Quecksilber leicht und ohne allen Abgang möglich, dagegen durch das Abtreiben des Bleies vom Silber immer ein Abgang des Silbers unvermeidlich ist, und ein nicht unbedeutender Theil des Silbers in die Glätte und in den Herd sich zieht, aus welcher er ohne neue Abgänge nicht darstellbar ist. Diese Umstände, so wie auch der geringe Brennmaterialsbedarf, welchen die Amalgamation erheischt, und die leichte Übersicht, welche sie

gestattet, macht dieselbe besonders wichtig und für den Bergbau höchst nützlich; obwohl daher *Born*, *Charpentier*, *Fragoso*, *Helms*, *Lampadius*, *Schwab*, *Rösler* und *Widemann* dieselbe bereits beschrieben haben, so dürfte doch eine specielle Darstellung dieses Prozesses nicht ohne Interesse seyn.

Die Amalgamation der Silbererze ist zu Arany-Idka erst seit acht Jahren im Betriebe, sie wurde durch den Mangel an Blei und Brennmateriale in dieser Gegend durchaus nothwendig, durch die thätige Einwirkung des Herrn Oberinspectors Grafen von *Sereny* und des Herrn Bergraths *Georg* von *Thonhauser* in Ausführung gebracht, und in der neuesten Zeit auch auf die Schwarzkupfer ausgedehnt, welche früher durch den Saigerprozefs zu Tajowa in Niederungarn entsilbert wurden, weil man sich von ihrem Nutzen für den oberungarischen District vollkommen überzeugte.

Das Amalgamirwerk zu Arany-Idka löset aufser den königlichen silberhältigen Gefällen blofs jene der Bartholomäi und Mathei Stollner Gewerkschaft ein, weil diese gemeinschaftlich ein kleines Pochwerk besitzen, in welchem sie ihre Erze pochen und ihre Pochgänge zu Schlich verarbeiten; die andern Gewerken bringen ihre Erze nach Altwasser in die Einlösung, wo dieselben mit den silberhältigen Kupfererzen verschmolzen werden.

Die Ursache, warum manche Gewerkschaften ihre silberhältigen Erze bei der Altwasserhütte einlösen, ist doppelt: erstens enthalten ihre Erze oft zugleich einlösungswürdige Mengen von Kupfer, welches die Amalgamirhütte nicht vergütet, zweitens fehlt es ihnen an Poch- und Mahlwerken; da aber das Amalgamirwerk nur Mehle und Schliche einlöst, so sind sie dadurch zur Einlösung bei der Altwasserhütte gewissermafsen genöthigt.

Die königl. Gefälle werden in dem Antoni-, Stephani-

und Johanni-Pochwerke gepocht, und in dem obern Stephani- und obern Johanni-Pochwerke in jedem mit zwei eisernen Mahlgängen gemahlen, von welchen jeder in 24 Stunden 10 bis 12 Centner Mehl erzeugt.

Die Pochwerke übernehmen die Erze weder nach dem Gewichte noch nach dem Halte, sondern bloſs summarisch; der Abgang, welchen demnach der Berg durch das Mahlen und Stampfen der Erze erleidet, ist nicht bekannt, schätzungsweise dürfte er 2 pCt. nicht übersteigen.

Da die Amalgamirkosten 1 fl. 10 kr. C. M. per Centn. des Erzes betragen, das Erz mag arm oder reich an Silber seyn, so ist es klar, daſs der Berg seine Gefälle zu concentriren suchen muſs. Die Concentrirungsabgänge betragen aber laut Ausweisen vom vorigen Jahre 10 9/10 pCt., wovon 2 pCt. dem Pochen und Mahlen zur Last fallen.

Bei armen, das ist 2 bis 3 Loth an Silber haltenden, Erzen steigt der Concentrirungsabgang bis 20 pCt., und bei Pochgängen, deren Silbergehalt in 1000 Centner nicht 200 Lothe erreicht, dürfte er 30 pCt. betragen, obwohl es genau nicht bekannt ist. Durch eine eigene Siebsatzmaschine, welche der thätige Herr Werkverwalter *Johann Tutschnag* einrichtete, und welche sich von den gewöhnlichen Siebsätzen dadurch unterscheidet, daſs nicht das Sieb, sondern das Wasser stoſsweise gehoben wird, ist es gelungen, 75 pCt. des Erzes der Pochgänge der nassen Aufbereitung zu entziehen, und dadurch den Abgang der Concentrationsarbeiten wesentlich zu vermindern.

Indem man durch die Concentration den Gehalt der Erze und Schliche zu erhöhen strebt, vermindert man wesentlich die Abgänge der Amalgamation. Die Erfahrung lehrt nämlich, daſs die Amalgamationsrückstände

immer 3 Denär bis 1 Quintchen an Silber enthalten, die amalgamirten Erze mögen 2 oder 8 Loth im Centner enthalten; ein Quintchen beträgt aber bei zweilöthigen Erzen den achten Theil oder 12.5 pCt., bei dreilöthigen Erzen den zwölften Theil oder 8 pCt., bei vierlöthigen Erzen den sechzehnten Theil oder 6 pCt., bei achtlöthigen Erzen endlich den 32sten Theil oder 3 pCt.

Es wird daher deutlich, daſs durch eine zweckmässige Concentration der Erze sowohl der Berg als die Hütte gewinnt; der erstere dadurch, daſs er weniger Schmelzkosten zahlt, die Hütte dadurch, weil sie geringere Abgänge erleidet. Ein Beispiel soll das Gesagte bestätigen.

Der Berg besitze 100 Centner dreilöthige Erze; will er solche bei der Hütte zur Amalgamation einlösen, so muſs derselbe per Centner 1 fl. 10 kr., also 116 fl. 40 kr. Conv. Münze Schmelzkosten bezahlen; concentrirt er aber dieselben auf 40 Centner und auf 7 Loth Silbergehalt, so hat derselbe nur 46 fl. 40 kr. C. M. zu bezahlen, und wird in diesem Falle 37 fl. 21 kr. C. M. mehr empfangen, obwohl er der Hütte 6 pCt. Silber weniger übergibt, wie aus folgender Rechnung ersichtlich ist:

100 Centner Erz à 3 Loth Silber enthalten 300 Loth oder 18 M 12 Loth; hievon der 5 pCt. Feuerabgang oder 15 Loth, bleibt 17 M. 13 Loth.

Die Mark à 24 fl. C. M., beträgt die

| | |
|---|---|
| Vergütung . . . . . . . . . | 427 fl. 30 kr. C. M. |
| hievon die Schmelzkosten mit . . | 116 » 40 » » |
| bleibt . | 310 fl. 50 kr. C. M. |
| hievon der zehnte Theil Frohne mit | 31 » 5 » » |
| verbleibt reine Gebühr . . . . . . | 279 fl. 45 kr. C. M. |

Im zweiten Falle, löset der Gewerk 40 Centner 7löthige Erze ein, so enthalten diese $40 \times 7 = 280$ Loth,

oder 17 Mark 8 Loth Silber; hievon 5 pCt. Feuerabgang mit 14 Loth, bleibt 16 M. 10 Loth.

Die Mark à 23 fl. C. M., beträgt die

Vergütung . . . . . . . . . . 399 fl. — kr. C. M.
hievon die Schmelzkosten mit . . 46 » 40 » »
bleibt . 352 fl. 20 kr. C. M.
von diesem Betrage ab die 10 pCt.
Frohne mit . . . . . . . . . 35 » 14 » »
verbleibt reine Gebühr . . . . . 317 fl. 6 kr. C. M.

also die obigen 37 fl. 21 kr. C. M. mehr. Der Vortheil muſs mit den Abgängen der Concentration im verkehrten Verhältnisse stehen.

Bei den Schmelzhütten ist das Einlösungs-System für die ärmern Zeuge günstiger, indem

die 2 bis $4^{1}/_{4}$ löthigen Erze per Cent. 1 fl. 30 kr. C. M.
» $4^{1}/_{2}$ » $6^{1}/_{4}$ » » » » 2 » — » »
» $6^{1}/_{2}$ bis höchsthältigen » » 3 » — » »

bezahlen müssen.

Offenbar wird bei diesem Einlösungs-Systeme der Berg für jede Concentration gestraft, für jede Herabsetzung des Haltes der Erze aber belohnt, wie folgende Beispiele erweisen:

Der Berg löse bei der Hütte 100 Centner obiger, also 3löthiger Erze ein, so enthalten diese $3 \times 100 =$ $= 300$ Lothe $= 18$ M. 12 Loth Silber; hievon der 5 pCt. Feuerabgang $= 15$ Loth, bleibt 17 M. 13 Loth.

Die Mark à 24 fl. C. M., beträgt die

Vergütung . . . . . . . . . 427 fl. 30 kr. C. M.
hievon die Schmelzkosten à 1 fl. 30 kr. 150 » — » »
bleibt . 249 » 45 » »
hievon ferner die 10 pCt. Frohne mit 27 » 45 » »
verbleibt reine Gebühr . . . . . . 249 » 45 » »

Wollte man nun diese Erze auf 60 pCt. concentri-

ren, und diese Concentration mit 6 pCt. Abgang, wie oben, bewirken, so würde der Centner der concentrirten Erze 4 ½ Loth Silber, und 60 Centner demnach $= 60 \times 4.5 = 270$ Lothe oder 16 M. 14 Loth Silber enthalten; der 5 pCt. Feuerabgang mit 13 Loth 2 Quintel, würde zurückbleiben 16 M. 2 Quintel.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Diese beträgt à 24 fl. . . . . . . | 384 fl. | 45 kr. | C. M. |
| hievon die Schmelzkosten à 2 fl. per Centner . . . . . . . . . | 120 » | — » | » |
| würde zurücklassen . . . . . . | 264 fl. | 45 kr. | C. M. |
| hievon die Frohne mit 10 pCt. oder | 26 » | 24½ kr. | C. M. |
| verbleibt reine Gebühr . . . . . | 238 fl. | 20½ kr. | C. M. |

also 11 fl. 35 kr. C. M. weniger, als man für 100 Centner 3löthige Erze erhalten würde.

Hat dagegen der Bergmann reiche Erze, so gewinnt er, wenn er denselben mehrere pCt. Sand oder taubes Gestein zumengt, wie aus dem Folgenden ersichtlich ist.

Man nehme an, er habe 100 Centner 7löthige Erze; diese enthalten demnach $7 \times 100 = 700$ oder 43 M. 12 L. Silber, so beträgt der Feuerabgang à 5 pCt. 35 Loth, es bleibt demnach 41 M. 9 Loth.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Die Mark à 24 fl., beträgt . . . . | 987 fl. | 30 kr. | C. M. |
| hievon die Schmelzkosten à 3 fl. 3 kr. mit . . . . . . . . . . . . . . | 305 » | — » | » |
| bleibt . | 682 fl. | 30 kr. | C. M. |
| hievon die 10 pCt. Frohne mit . . | 68 » | 15 » | » |
| verbleibt reine Gebühr . . . . . . | 614 fl. | 15 kr. | C. M. |

Theilt man diesen 100 Centnern Erz 20 Centner taubes Gestein zu, so werden die 120 Centner auch obige Silbermenge im Werthe von 987 fl. 30 kr. enthalten; da sie aber durch diese Beimengung unter 6 Loth herabfallen, so bezahlt der Centner nur 2 fl., also 240 fl. C. M. Schmelzkosten, es werden daher statt

| | | | |
|---|---|---|---|
| 682 fl. 30 kr. . . . . . . . . . . | 747 » | 30 kr. | C. M. |

zurückbleiben; von diesen die Frohne
mit . . . . . . . . . . . . . . 74 fl. 46 kr. C. M.
bleibt reine Gebühr . . . . . . . . 672 » 44 » »
also 58 fl. 29 kr. C. M. mehr, als wenn der Bergmann das reine 7löthige Erz eingelöst hätte.

Es geht hieraus deutlich hervor, daſs die Amalgamation und das Einlösungssystem derselben für den Bergbau sehr vortheilhaft sey, indem der Berg durch dieselbe bei der Einlösung von 100 Centner 2 bis 4 1/4 löthigen
Erzen . . . . . . . . . . . . . . 33 fl. 20 kr. C. M.
von 4 1/2 bis 6 1/4 löthigen Erzen . . 83 » 20 » »
bei 100 Centner 6 1/2 bis höchstlöthigen Erzen aber . . . . . . . . . 183 » 20 » »
bloſs zu Folge der geringern Amalgamirkosten gegen die Schmelzkosten erspare, und überdieſs durch zweckmäſsige Concentration noch mehr gewinnen kann.

Diese Verhältnisse allein sind schon geeignet, der Amalgamation das Wort zu führen; denn die 2 pCt. Poch- und Mahlabgänge werden durch die geringern Amalgamirkosten vollständig ersetzt, wie aus Folgendem hervorgeht.

Eine Gewerkschaft löse 400 Centner 4löthige Erze ein, so muſs dieselbe bei der Schmelzhütte 600 fl. C. M. Schmelzkosten bezahlen, bei der Amalgamirhütte bezahlt dieselbe 466 fl. 40 kr., also 133 fl. 20 kr. weniger, dagegen werden derselben 2 Mark Silber weniger vergütet, weil diese beim Pochen und Mahlen der Erze verloren gingen; wird der Werth dieses Silbers mit 48 fl. von obigen 133 fl. 20 kr. in Abzug gebracht, so bleiben der Gewerkschaft noch 85 fl. 20 kr. C. M. zu Guten, was dem Werthe von 3 1/2 Mark Silber entspricht; würde demnach der Mahl- und Pochabgang 5 1/2 pCt. übersteigen, so würde erst die Amalgamation gegen die Verbleiung im Nachtheile stehen, was aber bei weniger Achtsamkeit nicht möglich ist.

Die Abgänge der Concentration werden durch die bewirkte Verminderung der Schmelzkosten wieder ersetzt; wo dieſs nicht geschieht, findet keine Concentration Statt.

Die Poch-, Wasch- uud Mahlwerke erzeugen

*a*) trocken gepochtes Mehl,
*b*) gemahlenes Mehl,
*c*) Setzgängmehl,
*d*) Schliche, und
*e*) Schlamm.

Der Gehalt dieser Geschicke wechselt im Silber von 2 bis 10 Loth, der Durchschnittsgehalt beträgt aber 5 Loth. Eine Mark dieses Silbers enthält ein Denär Gold; hievon machen nur die gewerkschaftlichen Matheistollner Erze eine Ausnahme, indem ihr Goldgehalt in jeder Mark des Silbers 4 Denär beträgt; doch diese Gewerkschaft bringt jährlich nur 150 bis 200 Centner 5löthigen Mehls in die Einlösung. Die gesammte Einlösung beträgt 20 bis 21000 Centner Mehl im Durchschnittsgehalte von 5 Loth.

Das Amalgamirwerk übernimmt diese Mehle nach dem Gewicht ohne Aufschlag und ohne irgend ein Remedium, es bestimmt den Nässegehalt durch vorsichtiges Abtrocknen des Mehles auf einer kupfernen Pfanne nach gewöhnlicher und allgemein üblicher Weise, und führt denselben so wie das trockne Gewicht des Mehles sichtlich im Anschlage an.

Die Probe wird ohne Zusatz von Bleioxyd und Boraxglas, sondern bloſs mit Zusatz von 8 Schören Blei vorgenommen; bei Differenzen, welche 1 Loth nicht übersteigen, werden die Proben buchhälterisch ausgeglichen.

Die Vergütung erfolgt nach Abschlag des 5 pCtigen Feuerabganges und des 10 pCtigen Frohnabzuges

ohne Berücksichtigung der Denäre und des Goldgehaltes.

Die Amalgamations-Gebäude sind eine halbe Stunde von dem Berge entfernt, und erst seit acht Jahren vollständig hergestellt; sie bestehen

*a*) aus dem Erz- oder Mehlkram,
*b*) der Rosthütte,
*c*) den Mühlen,
*d*) dem Quicksaal,
*e*) dem Preſszimmer,
*f*) dem Probiergaaden,
*g*) der Materialkammer,
*h*) den Beamtenswohnungen, und
*i*) der Schmiede.

Die eigentlichen Manipulations-Gebäude folgen in jener Reihenfolge auf einander, in welcher die ganze Manipulation selbst fortschreitet, und ihre Einrichtung muſs zweckmäſsig genannt werden. Reinlichkeit und Ordnung herrscht überall.

Die Arany-Idkaer Erze, und daher auch ihre Mehle, enthalten prismatoidischen Antimonglanz (Antimonsulfurid, Grauspiesglanzerz, *W.*), wie das äuſsere Ansehen und das chemische Verhalten deutlich beweiset, indem sie sämmtlich vor dem Löthrohre einen weiſsen Dampf verbreiten, welcher die Kohle weiſs beschlägt; einige enthalten Arsenikkies, dessen Arsenikgehalt sich durch den Knoblauchgeruch ausspricht. Die meisten enthalten zugleich Blei, und zwar als hexaëdrischen Bleiglanz (Bleisulfurid), welches sowohl durch die naturhistorischen Eigenschaften als auch durch die Erhaltung eines bleiischen Amalgams erwiesen wird, welches man bei stärkerer Röstung und gröſserem Salzzuschlage stets erhält. Die Erze enthalten ferner Spuren von Kupferkies, doch beträgt der Kupfergehalt selten ein halb Procent,

und kann nur auf nassem Wege nachgewiesen werden; das erzeugte Amalgam enthält den ganzen Kupfergehalt der Erze, indem die Rückstände keine Spur desselben enthalten. Endlich enthalten die Erze nebst Spuren von Gold vorzüglich rhomboëdrischen Quarz (Kieselerde oder Siliciumoxyd) und Eisenkies (Eisenpersulfurid).

1000 Centner Mehl enthalten gewöhnlich eine Mark Gold; von diesem geht der vierte Theil in das Amalgam, wird aber nicht vergütet, der andere Theil bleibt in den Rückständen.

Neuere Versuche haben zwar in Niederungarn ausser allen Zweifel gesetzt, daſs das Gold aus den kiesigen und bleiischen Pochgängen durch die Zeller Goldmühle gewonnen werden kann, und 1000 Centner Pochgänge, welche sonst zu Kremnitz mittelst dem Sichertroge 8, höchstens 10 Loth Gold lieferten, geben nun 14 bis 18 Loth desselben; es ist daher auch wahrscheinlich, daſs die Arany-Idkaer Mehle, welche in 1000 Centner 16 Loth Gold enthalten, in dieser Mühle ebenfalls Gold liefern werden, um so mehr, da nicht zu zweifeln ist, daſs das Gold in denselben wirklich bloſs gediegen vorkomme, indem es bei einigen von dem Herrn Werksverwalter *Tutschnag* eingeleiteten Versuchen als Mühlgold dargestellt und amalgamirt wurde; es ist nun zu versuchen, ob die Mehle vor der Verröstung, wie dieſs zu Kremnitz und Schemnitz bereits geschicht, oder nach erfolgter Entsilberung durch die Goldmühle geleitet werden sollen. Fallen die Versuche, wie nicht zu zweifeln, glücklich aus, so wird der Berg zu Arany-Idka jährlich um 7660 fl. C. M. mehr Nutzen ausweisen, uud das Haupthinderniſs, welches der allgemeinen Einführung der Amalgamation im Wege stand, wird behoben.

Die Amalgamation der Erze zu Arany-Idka zerfällt in folgende Arbeiten:

*a*) das Beschicken der Erze,
*b*) » Rösten der Beschickung,
*c*) » Abreutern des Rostes,
*d*) » Mahlen desselben,
*e*) » Füllen der Fässer und das Anquicken,
*f*) » Probenehmen,
*g*) » Verdünnen des Breies,
*h*) » Ablassen des Amalgams,
*i*) » Durchseihen desselben,
*k*) » Auspressen desselben,
*l*) » Ausglühen,
*m*) » Schmelzen des Glühsilbers,
*n*) » Weiſssieden.

### *a*) Das Beschicken der Erze.

Die Beschickung hat den Zweck, immer einen gleichen Silbergehalt der zur Amalgamation bestimmten Mehle zu bewirken, und sie mit der zu ihrer vollständigen Zerlegung nöthigen Salzmenge zu vermischen.

Eine Gleichförmigkeit des Silbergehaltes ist in der currenten Manipulation nöthig, weil nach der Silbermenge die Quecksilbermenge bestimmt wird, welche bei einem ungleichen Silbergehalte bald vermehrt und bald vermindert werden müſste, und daher leicht Irrungen und ungleichförmige Resultate bewirken würde.

Der Beschickungsgehalt richtet sich nach dem Durchschnittsgehalt der eingelösten Mehle, dieser beträgt, wie oben gesagt wurde, 5 Loth, welchen Gehalt daher auch die Beschickung erhält. Daſs ein gröſserer Gehalt der Beschickung vortheilhafter seyn muſs, ist klar, wenn man bedenkt, daſs die Amalgamirrückstände immer einen gleichen Gehalt haben, daher bei reicherer Beschickung dic Abgänge geringer ausfallen müssen. Daſs aber die Beschickung 7- bis 8löthig seyn müsse, wie *Berzelius*

anführt, ist irrig, indem man eben so gut 2- als 20löthige Erze amalgamiren kann, wenn man eine verhältnifsmässig grofse Quecksilbermenge zutheilt, für jede 5 Lothe Silber sind 50 Pfunde Quecksilber erforderlich; man kann zwar mit geringern Mengen Quecksilber auslangen, aber es ist nicht rathsam, damit zu sparen, um so mehr, da es der currenten Manipulation nicht lange entzogen wird.

In der ältern Zeit betrachtete man einen 16- bis 20pfündigen Lechgehalt der Beschickung für die Amalgamation unentbehrlich, doch die vortheilhafte Amalgamation der Schwarzkupfer, welche höchstens 1 per Cent Schwefel enthalten, die zu Arany-Idka gemachte Erfahrung, welcher zu Folge auch ganz dürre Erze vollständig entsilbert werden können, beweisen die Unrichtigkeit dieser Ansicht, daher man auch zu Arany-Idka blofs den Silbergehalt, nicht aber den Schwefel- oder Lechgehalt der Beschickung beachtet, obwohl derselbe gewöhnlich zu Folge der Beschaffenheit der Erze 10 pCt. beträgt. Den gattirten Mehlen theilt man 10 pCt. Minutiensalz und 2 pCt. Pfannenstein zu; ersteres bezieht man aus der Marmorosch gegen eine Bezahlung von 12 kr. C. M. per Centner und 52 kr. Fuhrlohn, daher dem Werke der Centner Salz 1 fl. 4 kr. C. M. kostet, den Pfannenstein bezieht das Werk von der Saline zu Soovar.

Die Nothwendigkeit des Salzes hat sich auch hier erwiesen. Die Menge desselben hängt von der Lechmenge der Erze ab, und kann, wie später gezeigt wird, vermindert werden, wenn man die Mehle früher abschwefelt, und ihnen dann erst das Salz zutheilt, oder wenn man dürre, das ist schwefelarme Erze zu amalgamiren hat, welche eben so wie das Schwarzkupfer mit 6 pCt. Salz eben so gute Resultate liefern, als die kiesigen oder dürren Erze mit 12 pCt.

Die Gattirung der Mehle geschieht schon in dem Erzkrame, die Beschickung derselben mit Salz aber in dem Beschickungsgraben für jede Ofenladung insbesondere, indem man 350 Pf. Trockengewicht der Mehle mit 35 Pf. Minutiensalz und 7 Pf. Pfannenstein innigst mengt. Die vier Vormesser erhalten für das Abwägen eines jeden Centners Erz 1/4 kr., und für das Mengen der Beschickung eben so viel.

### *b*) Das Rösten.

Diese Arbeit ist für die Amalgamation die wichtigste, denn die Resultate hängen ganz von derselben ab.

Sie findet in den bekannten Flammenröstöfen Statt, welche aus feuerfestem Sandstein gebaut sind. Die Breite des Herdes von der Eintragsöffnung bis zur Hinterwand beträgt 8 Fuſs, die Länge an der Hinterwand 6 Fuſs. Die Höhe des Gewölbes ist 21 Zoll, die Länge der Schürgasse ist gleich der Breite des Herdes, übrigens 16 Zoll hoch und 15 Zoll breit. Der Fuchs- oder der Flammenzug ist 10 Zoll vom Herdpflaster entfernt, 30 Zoll lang und 6 Zoll hoch.

Die Arbeitsthür hat eine Breite von 36 Zoll, und eine Höhe von 18 Zoll; sie ist während der Operation immer offen, und der Arbeiter rührt mittelst einem eisernen Rechen die Masse unausgesetzt, so wie er sie auch von Zeit zu Zeit mittelst einer Schaufel wendet, wodurch ihre vollständige Verröstung sehr befördert wird. Die Menge des beschickten Erzmehles, welches auf ein Mal eingetragen wird, beträgt 392 Pf., und besteht, wie schon gesagt wurde, aus 350 Pf. Erzmehl, 35 Pf. Minutiensalz, und 7 Pf. Pfannenstein.

Man unterscheidet vier Perioden der Röstung:

*a*) die Abtrocknungsperiode,

*b*) » Anzündperiode,

*c*) die Abschwefelungsperiode, und endlich
*d*) » Gaarröstperiode.

Die Abtrocknungsperiode dauert nur einige Minuten, denn da der Ofen bereits heiſs ist, wenn die Beschickung eingetragen wird, und diese nicht sehr naſs ist, so trocknet sie bald aus, und das Salz verknistert.

Ist beides erfolgt, so beginnt der Arbeiter zu heitzen, und steigert die Temperatur so lange, bis die ganze Masse in einen lichtroth glühenden Zustand versetzt (angezündet) wird, welches in $^5/_4$ Stunden erfolgt, daher der Arbeiter auf die Stunde angewiesen ist; nach dieser Zeit hört das Heitzen auf, und es beginnt die Abschwefelungsperiode, obwohl auch schon während der Anzündperiode eine bedeutende Menge Schwefel oxydirt wird; der Arbeiter muſs nun die glühende und heftig dampfende Masse fleiſsig rühren und wenden. Während dieser Periode strömt die atmosphärische Luft nicht nur durch die Arbeitsthür, sondern auch durch den Rost (auf welchem nun kein Brennmaterial liegt, durch welches sie zerlegt werden könnte), über den Herd, wodurch die Oxydation des Schwefels und der Metalle sehr begünstigt wird. Die Abschwefelungsperiode dauert vier Stunden, nach welcher Zeit der Ofen bedeutend abgekühlt, und das Mehl ganz dunkel geworden ist.

Das Mehl verbreitet nun einen schwachen Geruch nach Chlor, dagegen es in der Anzündperiode und in den zwei ersten Stunden der Abschwefelungsperiode einen ausgezeichneten Geruch nach schwefeliger Säure verbreitet, welche sich wirklich in dieser Epoche in bedeutender Menge entwickelt.

Wird das abgeschwefelte Mehl mit verdünnter und erwärmter Chlorwasserstoffsäure übergossen, so entwickelt sich keine Spur Schwefelwasserstoffgas, welches auf eine vollständige Zerlegung der Sulfuride deutet.

Der Rost besitzt einen ausgezeichneten metallischen Geschmack, und enthält bedeutende Mengen von Eisen- und Kupfervitriol. Mit Ammoniak digerirt färbte sich die Flüssigkeit blau, und gab mit Salpetersäure neutralisirt einen deutlichen weifsen Niederschlag, welcher im Sonnenlichte schwarz wurde; als das abgeschwefelte Mehl wiederholt mit Ammoniak digerirt wurde, bis sich dieses nicht mehr färbte, und auch mit Salpetersäure neutralisirt keinen Niederschlag gab, lieferte es nach der gewöhnlichen Probe noch 2 Loth, 2 Quintchen Silber, woraus hervorgeht, dafs das Silber sich in demselben nur zum Theil als Silber-Chlorid (Hornsilber) befinde.

Die Beendigung der Abschwefelungsperiode wird nur durch die Stunde, nicht aber durch irgend ein empirisches Kennzeichen angedeutet, und das Resultat derselben mufs um so besser seyn, je höher die Temperatur ist, welche der Ofen während der Anzündungsperiode erhalten hat.

Ist die für die Abschwefelungsperiode bestimmte Zeit verflossen, so beginnt der Arbeiter neuerdings zu heitzen, und unterhält durch 1 $^1/_4$ Stunde eine hohe Temperatur, welche Zeitperiode die Gaarröstperiode genannt wird.

Während dieser Periode verbreiten die Erzmehle einen ausgezeichneten Chlorgeruch; werden dieselben auf gleiche Weise behandelt, wie die abgeschwefelten, so zieht das reine Ammoniak weniger Hornsilber heraus, und es wird daher sehr wahrscheinlich, dafs ein Theil des Silber-Chlorids bei dieser erhöhten Temperatur durch Einwirkung der Metalloxyde zerlegt werde.

Die gaargerösteten Mehle werden in eine kupferne, auf einem eisernen Karren ruhende Pfanne, welche unter die Arbeitsthür gefahren wird, gesammelt, und auf den Kühlplatz, welcher an der Rückseite der Öfen an-

gebracht ist, gestürzt; sie haben eine braunrothe Farbe, ein geringeres specifisches und absolutes Gewicht, ihr Volumen dagegen ist vergröſsert.

Die Röstung wird durch vier Arbeiter geleitet, welche sich in zwölfstündigen Schichten abwechseln; in jeder Schicht arbeitet ein Vorröster und ein Nachröster, der erstere erhält 24 kr., der zweite aber 21 kr. C. M. per Schicht. Die Zahl der Röstöfen ist 6, die sämmtliche Zahl der Vorröster demnach 12, und eben so groſs jene der Nachröster. Alle 24 Stunden werden in sämmtlichen Röstöfen 77 Centner und 40 Pfund Erzmehle mit der oben angeführten Salzmenge vermengt verröstet. Die Menge des Flugstaubes ist sehr gering, und der Gehalt desselben nur 2 bis 3 Loth per Centner. Die Theorie dieses Röstprocesses ist folgende:

Zuerst entweicht das Wasser. Hat das Erz jene Temperatur erhalten, welche zur Verflüchtigung des Schwefels nöthig ist, so fängt dieser an zu brennen, und es bildet sich schwefelige Säure. Das Kochsalz wird während dieser Zeit nicht zerlegt, sondern befördert nur die Oxydation durch die galvanische Thätigkeit, die es befördert; es bilden sich zugleich schwefelsaure Metallsalze, namentlich schwefelsaures Eisenoxydul, schwefelsaures Kupfer, Mangan und Zinkoxyd. Erst bei der Gaarröstperiode werden die gebildeten schwefelsauren Metallsalze, vorzüglich das schwefelsaure Eisen- und Kupferoxyd, zerlegt, und die sich aus denselben ausscheidende Schwefelsäure, in Verbindung des Wasserdampfes der atmosphärischen Luft, welche über den Herd streicht, zersetzt nun das Kochsalz, indem der Sauerstoff des Wassers an das Natrium, der Wasserstoff an das Chlor, die Schwefelsäure aber an das gebildete Natriumoxyd tritt. Die Chlorwasserstoffsäure wird durch das Manganoxyd, so wie auch durch die andern Metall-

oxyde zerlegt, entweicht zum Theil als solche, zum Theil als Chlor.

Die Menge der Chloride im Roste vermindert sich mit der Temperatur in der Gaarröstperiode, und verschwindet endlich ganz, wenn diese anhaltend und stark genug war, indem sich manche als Chloride verflüchtigen, manche aber, so z. B. das Silber- und Kupfer-Chlorid, zerlegt werden.

Die abgeschwefelten Mehle enthalten das Silber zum Theil metallisch, zum Theil höchst wahrscheinlich als schwefelsaures Silber, sie enthalten viel schwefelsaure Salze, und beinahe das ganze noch unzerlegte Natrium-Chlorid; bringt man sie ins Wasser, so verwandelt sich das schwefelsaure Silberoxyd in Silber-Chlorid, welches demnach vom Ammoniak gelöst wird.

Die Gaarröstperiode bewirkt nur die Zerlegung des schwefelsauren Eisen-, und zum Theil auch jene des schwefelsauren Kupferoxyds; da aber während derselben ein Theil des Silbers verflüchtiget, und durch eine partielle Zusammensinterung der Masse ein Theil desselben eingeschlossen wird, so wird dieselbe, vorzüglich wenn die Temperatur zu hoch gesteigert wird, mehr schädlich als nützlich; sie ist übrigens überflüssig, weil man diese Salze, wenn sie ja bei der Amalgamation nachtheilig wirken sollten, zweckmäfsiger und vollständiger durch Auslaugen entfernen, dadurch eine gröfsere Reinheit des Amalgams bezwecken, und überdiefs den kostspieligen Brennmaterialsaufwand der Gaarröstperiode ersparen könnte.

Dafs die Gaarröstperiode überflüssig ist, wird auch durch Erfahrung bestätiget, denn die Analyse der entschwefelten und der gaargerösteten Mehle hat aufser allen Zweifel gesetzt, dafs die Menge des Silber-Chlorids in dem letztern bedeutend geringer als in

dem erstern ist, die Ansicht von *Gmelin*, *Berzelius*, *Karsten*, *Lampadius* und *Rivero* daher nicht bestätigt werde, indem diese das Silber in dem Roste als Silber-Chlorid enthaltend annehmen; nachdem ferner die entschwefelten Mehle gar keine Spur von Sulfuriden enthalten, so wurde ein Versuch eingeleitet, die bloſs entschwefelten Erze zu amalgamiren.

Der Versuch wurde in einem kleinen Fasse und mit 3 Centner der Erzmehle vorgenommen, und die Rückstände nur 3 Denär reichhältig gefunden. Der Versuch wurde nochmals im kleinen Fasse, und endlich mit 12 Centner in einem groſsen Fasse vorgenommen. Die Resultate blieben sich gleich, wie der folgende Ausweis zeigt.

## A u s w e i s

der Ausfälle von abgeführten Amalgamations-Versuchen mit bloſser Abschwefelung, also ohne Gaarröstung der Erze.

| | Gewicht d. verquickten Mehls | | Zugesetzt | | | | Zurück erhalten | | | | | | Ergibt sich Abgang | | | | | | | | Silbergehalt d. Rückstände. | | Silber, feines. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Quecksilber. | | Eisenkugeln | | Amalgam. | | Quecksilber. | | Eisenzaine. | | am Quecksilber im Ganz. | | oder per Centner Mehl. | | Eisenzaine im Ganz. | | oder per Centner Mehl. | | | | | | |
| | Ctr. | Pf. | Pf. | Lth. | Pf. | Lth. | Pf. | Lth. | Pf. | Lth. | Pf. | Lth. | Pf. | Lth. | Pf. | Lth. | Pf. | Lth. | Pf. | Lth. | Qtl. | Den. | Lth. | Qtl. | Den. |
| In einem grossen Fasse . . | 12 | — | 400 | — | 100 | — | 32 | 9 | 398 | 14 | 97 | — | 1 | 18 | — | 4 | 3 | — | — | 8 | 1 | — | 7 | — | 2 |

Bei dem Versuche im Großen, bei welchem zugleich auf die Menge des verbrauchten Quecksilbers Rücksicht genommen wurde, zeigten sich an diesem große Abgänge, welches aber bloß dem Umstande zugeschrieben werden muß, daß die Menge des Amalgams gering war, und daß das Ausglühen desselben in gläsernen Retorten Statt fand.

Denn glüht man in einem Apparate, er mag seyn, welcher er wolle, ein Mal 70 Loth, das zweite Mal aber 70 Mark Amalgam aus, so wird der Abgang an Quecksilber bei gleichen Apparaten auch jedes Mal gleich seyn. Dieser Abgang betrage bei 70 Loth Amalgam 1 Loth, so ist dieses Loth $^1/_{60}$ des Quecksilbers, indem 70 Loth Amalgam 60 Loth Quecksilber enthalten; bei 70 Mark Amalgam wird er aber auch nur 1 Loth, also $^1/_{960}$ Theil des Quecksilbers im Amalgam betragen. Die größeren Abgänge an Quecksilber, welche demnach aus dem vorliegenden Ausweise dieses Versuches hervorgehen, dürfen gegen die günstigen Resultate desselben in Beziehung auf das Silber nicht als wichtig betrachtet werden, da es nicht zu zweifeln ist, daß wenn mehrere hundert Mark des erzeugten Amalgams auf ein Mal werden ausgeglüht werden, dieser Abgang jenem der currenten Manipulation gleich seyn wird.

Wirklich ist auch bei näherer Untersuchung dieses Gegenstandes kein Grund ersichtlich, warum dieser Abgang wirklich vermehrt werden sollte, denn die größere Menge von schwefelsauren Salzen kann wohl einen grösseren Verbrauch des Eisens, durch welches das Quecksilber vor jeder Oxydation geschützt wird, nicht aber die Oxydation des Quecksilbers selbst bedingen. Will man aber annehmen, daß diese Salze das Zerschlagen des Quecksilbers, und daher auch den Abgang desselben vermehren, so darf man nicht übersehen, daß in

diesem Falle auch die Rückstände hältiger an Silber ausfallen müfsten, da das zerschlagene Quecksilber silberhältig wäre, was die Resultate der Versuche widerlegen. Überdiefs könnte man, wenn diefs wirklich der Fall seyn sollte, die Salze durch Auslaugen entfernen, und durch Krystallisation aus denselben den gröfsten Theil des unzerlegten Salzes erhalten.

Sämmtliche Metall-Sulfuride und Arsenide der Beschickung werden durch die Röstung oxydirt. Oxydation ist daher die Hauptwirkung derselben, sie wird durch das Salz befördert, und blofs defshalb, nicht aber wegen der Bildung des Silber-Chlorids ist dessen Zutheilung nöthig.

Die Oxydation ist aber nur während der Abschwefelungsperiode möglich, weil bei der jetzigen Construction der Öfen nur während derselben reine atmosphärische Luft über den Herd streicht; soll die Oxydation auch während der Anzündperiode erfolgen, so mufs der Röstofen eine zweckmäfsige Veränderung durch Vorrichtung eines nach der ganzen Breite des Herdes angebrachten 6 bis 8'' breiten Canals erhalten, wie aus Figur 27, 28 und 29 ersichtlich ist. Der Luftcanal wird unter die aus gufseisernen Platten bestehende Herdsohle geleitet, wodurch die einströmende Luft erwärmt, und der Herd nicht abgekühlt wird. Die Mafse des Ofens können ganz die oben angeführten bleiben. Die vollständige Röstung der Erzmehle erfolgt in einem solchen Ofen in 2 Stunden, dagegen dieselbe in den gewöhnlichen in 6 $^1/_2$ Stunden, und mit Beseitigung der Gaarröstung in 5 $^1/_4$ Stunden erfolgt.

100 Centner Erzmehle bedürfen in dem gewöhnlichen Ofen 4 Kubikklafter Ruthenbürteln und 4 $^3/_4$ Klafter Röstholz. In den Fig. 27, 28 und 29 verzeichneten Ofen wird man, wie aus den Resultaten desselben im Kleinen

geschlossen werden kann, höchstens von jeder Holzart 3 Klafter bedürfen, und daher fast ein Drittel Brennmaterial ersparen; eine Unterbrechung der Feuerung und eine nachtheilige Abkühlung des Ofens ist, bei der angeführten Construction desselben, überflüssig.

Wird durch eine vorläufige Verröstung der Erzmehle der Schwefelgehalt derselben vermindert, so kann man auch mit dem Salzzuschlag bis 5 pCt. herabgehen, weil dasselbe nun auch weniger zerlegt werden kann; es ganz zu beseitigen, ist nicht rathsam, weil eine vollständige Oxydation mancher natürlicher Verbindungen nur durch Beihülfe von Salz möglich wird. Dieses wird bei der Schwarzkupfer-Amalgamation bestätigt, welche mit 5 pCt. Salz verröstet und amalgamirt, vollständig entsilbert werden kann, indem die Rückstände auch nur 3 Denär, höchstens 1 Quintchen Silber enthalten.

Das Gold ist in dem Roste nicht als Aurat enthalten, welches sich im Wasser auflösen, und goldfreie Rückstände zurücklassen müfste, was durch eine Untersuchung nicht bestätiget wurde; aus gleichem Grunde kann das Gold nicht im Roste als Chlorid enthalten seyn. Es im Roste als Oxyd befindlich zu betrachten, ist nicht zulässig, da bei der Temperatur der Gaarröstperiode dessen Zerlegung erfolgen müfste, und der Rost, mit Wasser und mit Salzsäure wiederholt behandelt, sich goldhältig erwies, da doch die Salzsäure das Goldoxyd aufgelöst hätte. Eine unbekannte Verbindung des Goldes in dem Roste anzunehmen, ist durch keine Erfahrung begründet; da aber das Silber in demselben im metallischen Zustande zum Theil enthalten ist, so dürfte die Annahme, dafs das Gold auch in solchem Zustande in demselben befindlich ist, die gröfste Wahrscheinlichkeit für sich haben, und es bleibt daher zu untersuchen übrig, warum das im Roste befindliche Gold nicht von

dem Quecksilber aufgenommen werde. Diese Erscheinung kann durch mehrere Umstände begründet werden:

*a*) durch die geringe Verwandtschaft des Goldes zum silberhältigen Quecksilber,

*b*) durch eine zu geringe Menge desselben,

*c*) durch eine unzweckmäſsige Vorrichtung.

Daſs das Gold zu dem reinen Quecksilber eine grössere Verwandtschaft als zu dem silberhältigen Quecksilber besitzt, geht zum Theil aus dem Umstande hervor, daſs dasselbe aus der Verbindung mit dem Quecksilber durch Silber gefällt wird. Denn man nehme 1 Loth Gold, und bringe es in 100 Pfund Quecksilber, so erhält man, wenn man das Quecksilber durch Leder preſst, bei 16 Grad *R.* gar kein Amalgam; ein Beweis, daſs das Gold vollständig aufgelöst ist. Mengt man nun 8 Loth fein zertheiltes Silber hinzu, und preſst, wenn sich dieses vollständig amalgamirt hat, das Quecksilber abermals durch das Leder, so erhält man 56 $^1/_2$ Loth Amalgam, welches ausgeglüht 8 $^1/_2$ Loth Silber, und wenn dieses in Salpetersäure gelöst wird, 1 Loth Gold liefert; man erhält also das ganze Gold, dagegen von dem Silber $^1/_2$ Loth im Quecksilber zurückbleibt. Aus diesem Versuche scheint hervorzugehen, daſs man die Amalgamation des Goldes nicht mit jener des Silbers zugleich vornehmen solle.

In Beziehung auf die Silbermenge hat die Erfahrung gelehrt, daſs die Entsilberung der Erze mittelst Amalgamation nicht unter 3 Denär per Centner erfolge, welchen Gehalt daher bei zweckmäſsig geleiteter Operation die Amalgamirrückstände immer zeigen. Die Erze enthalten in einer Mark des Silbers 1 Denär in Gold; eine Mark Silber ist aber in 3 Centner des Erzmehles enthalten, welche demnach 1 Denär Gold enthalten. Die Menge ist freilich sehr gering, aber 1000 Centner Pochgänge

enthalten in Salzburg nur 5 Loth oder 80 Denär Gold, und doch werden 4 Lothe des Goldes mittelst der Goldmühlen gewonnen. Es ist kein Grund vorhanden, anzunehmen, daſs das Gold in Salzburg andere Eigenschaften besitzen soll, als jenes zu Arany-Idka, wo in 1000 Centner Erzmehlen 16 Loth Gold enthalten sind; man kann also diese Menge nicht gering nennen, und darf derselben nicht die Ursache zuschreiben, da in Salzburg geringere Mengen wirklich ausgebracht werden, und dasselbe bei gleichen Goldmengen zu Kremnitz und Schemnitz wirklich geschieht.

Im Salzburgischen und in Niederungarn werden aber die Pochgänge nicht gemahlen, sondern gepocht, dagegen die gerösteten Mehle zu Arany-Idka gemahlen werden; sollte vielleicht dieser Umstand auf die Goldgewinnung nachtheilig wirken? Die Amalgamation findet nicht in den *Born*'schen horizontalen Fässern, sondern in den Quickmühlen Statt, in welchen die göldischen Zeuge durch eine Quecksilberlage getrieben werden; weder das Quecksilber noch die Erze enthalten gediegenes Silber, und das erhaltene Gold enthält nur so viel von demselben, als das natürliche Gold enthält. Sollte dieses abweichende Verfahren und der Mangel an Silber zur Aufnahme des Goldes beitragen? Wahrscheinlich sind diese Umstände von gröſserem Belange, als man bis jetzt gedacht het, und da darüber Versuche baldigst angestellt werden dürften, so ist zu erwarten, daſs dieselben dieses Dunkel vollständig aufklären werden.

### *c*) Das Absieben oder Abreutern der Graupen.

Wenn die Röstmanipulation in den bestehenden Röstöfen noch so vorsichtig geleitet wird, so ist ein Zusammenbacken des Mehls an einzelnen Stellen doch unver-

meidlich. Diese zusammengebackenen Massen, Graupeln genannt, enthalten oft rohe Erzmehle eingeschlossen, und vermehren daher den Gehalt der Rückstände, weil sie durch Quecksilber nicht entsilbert werden können, man hat es daher für zweckmäſsig erkannt, dieselben abzusondern, sie zu schroten, mit 2 pCt. Salz zu versetzen, und neuerdings zu verrösten; gewöhnlich geschieht dieſs am Samstage, wo alle durch die Woche abgefallenen Graupeln verröstet werden.

Die Reutermaschine besteht aus einem unter 7 bis 8 Grad geneigten, an der schmalen und geneigten Seite offenen, an den andern Seiten mit einem 2 Zoll hohen Rande versehenen, 4 Fuſs langen und 15 Zoll breiten Siebe, welches in einem geschlossenen, in 2 Theile getheilten Kasten mittelst Wasserkraft bewegt wird. Das offene Ende des Siebes ragt in jedem Stande in den vordern Kasten, in welchen demnach die Graupen fallen.

Der Rost wird mittelst eines trichterförmigen Kastens allmählich auf das Sieb gestürzt.

Gewöhnlich erhält man 15 bis 20 pCt. Graupeln, doch ist die Menge derselben um so gröſser, je gröſser die Temperatur in der Anzünd- und in der Gaarröstperiode, und je geringer der Fleiſs des Arbeiters war.

Das Abreutern ist die Arbeit des Müllers, welcher auch die erhaltenen Graupen schrotet und mahlet. Er steht im Gedinge, wird per Centner rohen Gewicht mit 3 kr. C. M. bezahlt, wo er das Reutern, das Schroten und das Mahlen besorgen muſs.

### *d*) Das Mahlen des abgesiebten Rostes.

Diese Arbeit geschieht in den gewöhnlichen Kornmühlen, welche aber keine Beuteln haben. Die Mühlsteine haben 42 Zoll im Durchmesser, und werden aus dem Hlinicker Steinbruche in der Nähe von Schemnitz

bezogen; ein Stück desselben kommt dem Werke auf 16 bis 24 fl. C. M., und dauert 3 bis 4 Monate als Laufer, und 6 bis 8 Wochen als Bodenstein. Arany-Idka besitzt drei solche Mahlmühlen, jede mit drei Gängen; zur Bedienung derselben sind neun Müllergesellen, unter welche als Bezahlung so viele Groschen vertheilt werden, als Centner rohes Gewicht an Erz verarbeitet wurde; sie sind aber dafür zugleich verpflichtet, das nöthige Leuchtmateriale und die Schmiere der Maschinen zu bestreiten.

Zur Übersicht sämmtlicher Mühlen ist überdieſs ein Mühlmeister mit einem Taglohn per 30 kr. C. M. angestellt.

Eine Mühle mahlt für jede Stunde 90 bis 120 Pfund. je nachdem die Wassermenge groſs ist.

Obwohl das Mahlen eine rein mechanische Sache ist, so übt sie doch einen wesentlichen Einfluſs auf die Manipulations-Resultate.

Der Müller, welcher nach dem Centner gezahlt ist, kann durch die Erzeugung eines gröbern Mehls seinen Zweck geschwinder erreichen, und sich daher die Arbeit erleichtern, gibt aber dadurch Veranlassung zu reichern Rückständen; es dürſte daher zweckmäſsiger seyn, den Müller im Tagelohn zu halten, da es sehr schwierig ist, die Feinheit der Mehle genau zu untersuchen.

Bei der Vermahlung des Rostes wird kein Abgang verrechnet, obwohl ein solcher unvermeidlich ist. Die Ursache liegt in der schweren Bestimmbarkeit dieses Abganges; denn da der Rost während dem Mahlen befeuchtet werden muſs, um dessen Verstaubung zu hindern, da er überdieſs an der atmosphärischen Luft Wasser anzieht, so müſste man zur richtigen Bestimmung das Mehl neuerdings trocknen, was in der fortlaufenden Manipulation nicht möglich ist, daher man sich damit begnügt,

den Abgang sämmtlicher Manipulationen summarisch aufzuführen.

### *e*) Das Anquicken.

Diese Operation findet in den von *Born*'schen horizontalen Fässern Statt, von welchen der Quicksaal acht groſse und ein kleines Probefaſs besitzt. Die Fässer sind von Tannenholz, sie haben einen Durchmesser von 42″ und 5 Fuſs Länge, äuſserlich zwar eine bauchige Form, um die Befestigung der Reiſe zu gestatten, doch im Innern sind sie vollkommen cylinderförmig, um eine gleichförmige Vertheilung des Quecksilbers und der eisernen Kugeln zu bewirken, welche sich sonst nach dem Mittelpuncte drängen, und sie geschwinder zerstören würden.

Ein neues Faſs kostet dem Werke an Binderarbeit 8 fl., an Schmiedarbeit per Pfund 6 kr. C. M.; erhält der Schmied die Reiſe und Schrauben von einem verbrauchten Fasse, so erhält derselbe für das Beschlagen eines Fasses 4 fl. C. M.

Das überschlächtige Wasserrad, durch welches diese Fässer in Bewegung gesetzt werden, hat 36 Fuſs im Durchmesser. An der Welle desselben befinden sich zwei Kammräder von 8 Fuſs Durchmesser, deren Zähne, 72 an der Zahl, in die an beiden Seiten des Kammrades gelegenen, 4 Fuſs im Durchmesser haltenden, Getriebe greifen, welche 36 Triebstäbe besitzen.

Die Achse der Quickfässer steht der Achse der Getriebe entgegen, und läſst sich mit der letztern durch eine verschiebbare eiserne Büchse verbinden, wodurch die Fässer in Gang gesetzt, durch Verschiebung dieser Büchsen aber sogleich wieder arretirt werden können. Zu Folge der mechanischen Construction der Kamm- und Getrieberäder machen die Fässer eine doppelte Zahl der Umdrehungen von jener des Wasserrades, gewöhnlich per Minute 18 bis 24 Umdrehungen.

Ein jedes Faſs erhält 12 Centner gemahlene Mehle, 1 Centner eiserne Kugeln, und 18 Kannen à 5 W. Maſs, also 90 Maſs heiſses Wasser, welches in einem hölzernen Bottiche gewärmt wird, in dessen Mitte ein eiserner Ofen angebracht ist.

Das Quecksilber im Gewichte von 4 Centner wird erst eine Stunde später eingetragen.

In den frühern Jahren hat man sich statt der eisernen Kugeln eiserner Schienen bedient; da man sich aber überzeugte, daſs die Fässer nur 50 Amalgamationen aushielten, wenn sie mit eisernen Schienen geladen wurden, und sie mit Kugeln 85 bis 95 Amalgamationen aushalten, so zieht man nun die letztern vor.

Das Füllen geschieht mittelst kupferner Trichter, und der Arbeiter hat dabei Zweierlei zu beachten:

*a*) daſs das Mehl, mit Wasser angemacht, keine Klumpen bilde,

*b*) daſs der Brei weder zu dick noch zu dünn ausfalle.

Das erstere verhindert er durch sorgfältiges Rühren in dem Momente der Füllung, das zweite wird zum Theil durch die Wassermenge bestimmt, doch erfordert die Beschaffenheit der Mehle manchmal eine Abweichung; 18 Kannen Wasser sind durchaus nothwendig. Nach einer Stunde, und ehe das Quecksilber eingefüllt wird, untersucht der Arbeiter den Brei, und setzt etwas Wasser zu, wenn er zu dick ist; ein zu dünner Brei hinterläſst immer reichere Rückstände, als ein dicker, daher der erste vorzüglich vermieden werden muſs.

Hat man das Quecksilber eingefüllt, so werden die Fässer geschlossen und durch 16 Stunden im Gange erhalten, indem man ihnen per Minute 18 bis 24 Umdrehungen gibt; eine geringe Zahl Umdrehungen veranlaſst reichere Rückstände, und eine gröſsere Zahl derselben

veranlaſst viel zerschlagenes Quecksilber, beides muſs vermieden werden.

War die Röstung vollständig und nicht zu übertrieben, hatte das Mehl den gehörigen Grad der Feinheit, der Brei die zweckmäſsige Consistenz, war das Wasser heiſs und die Bewegung der Fässer entsprechend, so ist in 16 Stunden die Amalgamation vollendet; eigentlich erfolgt dieselbe schon in 12 Stunden, und wird nur zur gröſseren Sicherheit 16 Stunden fortgesetzt.

Das Anquicken, so wie alle hiezu gehörigen Arbeiten, nämlich das Füllen der Fässer, das Verdünnen des Breies, das Ablassen des Amalgams und das Verwaschen der Rückstände, werden von 4 Anquickern und 4 Anquickjungen besorgt; von den erstern erhalten 2 täglich 23 kr., die 2 andern aber 21 kr., die letztern erhalten täglich 12 kr. C. M.

### *f*) Probenahme.

Da es doch möglich wäre, daſs eine der oben angeführten Ursachen die vollständige Entsilberung der Mehle verhindert hätte, so wird nach erfolgter Arretirung der Fässer die Probe genommen.

Man hebt zu diesem Zwecke mittelst eines an einer Stange befestigten Bechers aus allen Theilen des Fasses etwas von dem Brei heraus, verwischt denselben in eigenen, mit eingebogenem Rande versehenen Schüsseln, aus welchen das Quecksilber nicht herausgeführt werden kann. Die erhaltene Trübe wird der Ruhe überlassen, das Wasser dann abgegossen, die Mehle aber auf eisernen Schaufeln getrocknet, auf einer erwärmten eisernen Platte fein gerieben, und auf gleiche Weise, wie das Erz, eingewogen.

g) Das Verdünnen des Breies.

Während der docimastischen Untersuchung der Rückstände werden die Fässer mit Wasser voll gefüllt, neuerdings in Bewegung gesetzt, und in derselben so lange erhalten, bis die Resultate der Probe bekannt sind.

Der Zweck dieser Operation ist die Abscheidung des amalgamhältigen Quecksilbers, welches gröſstentheils in dem Brei fein zertheilt enthalten ist, und welches sich aus dem verdünnten Breie zu Folge des groſsen spec. Gewichtes bald vollständig abscheidet.

Ist die Probe beendet, so wird das Amalgam abgelassen, die Rückstände mögen reich oder arm gefunden werden, nur werden die ersten, worunter man jene begreift, deren Gehalt an Silber 1 Quintchen 2 Denär übersteigt, aufgefangen, um sie in kleinen Parthien wieder den Erzen zuzutheilen; jene Rückstände, welche diesen Gehalt nicht erreichen, werden der wilden Fluth überlassen, obwohl 1000 Centner derselben 1 Mark Gold und 250 Lothe Silber enthalten.

Der Abgang an Silber, welcher durch den quintlichen Gehalt der Rückstände herbeigeführt wird, ist geringer als jener der Roharbeit bei der Silberhütte, denn er beträgt 5 pCt., während der letztere eigentlich 11.8 pCt. beträgt. Denn 100 Centner Erze und Schliche, deren Gehalt per Centner $^7/_8$ Loth ist, und welche demnach 87.5 Loth Silber enthalten, werden mit 16 pCt. Kalk und 120 pCt. Frischschlacke beschickt. Da diese Beschickung 25 Centner Leche liefert, so erhält man an Rohschlacken $16 + 120 + 75 = 211$ Centner. Diese enthalten aber per Centner 1 Denär, also 211 Denär = 52 Quintchen oder 13 Loth Silber. Da die zugetheilten Frischschlacken per Centner 3 Denär, also 360 Denär oder 22.5 Lothe Silber enthielten, so hatte man eigentlich in der Vormaſs $87.5 + 22.5 = 110$ Lothe Silber; von

diesen gingen aber 13 Loth in die Schlacke, welches den oben angeführten 11.8 pCt. gleich ist. Nun erleiden aber die erzeugten Leche noch einen Abgang an Silber bei den folgenden Manipulationen, wodurch deutlich wird, dafs die Eintränkarbeit der Amalgamation in Hinsicht auf die Silbergewinnung nachsteht.

Die Eintränkarbeit gewinnt aber $^{19}/_{20}$ des Goldes, welches die Amalgamation nicht darstellt. Da 1000 Centner der Erzmehle 16 Lothe Gold enthalten, so beträgt daher für jede 1000 Centner Erzmehle der Goldverlust 346 fl. 48 kr., um welchen Betrag demnach die Amalgamirkosten per 1000 Centner erhöht werden. Da aber für jede Mark Silber die Scheidkosten 1 fl. C. M. betragen, in den 1000 Centner Erzen aber 312 Mark und 8 Loth göldiges Silber enthalten ist, so müssen von obiger Summe 312 fl. 30 kr. C. M. in Abschlag gebracht werden, wonach der eigentliche Verlust für den Berg nur 346 fl. 48 kr. — 312 fl. 30 kr. = 34 fl. 18 kr. beträgt, was für jeden Centner des Erzes nur 2 kr. C. M. ausmacht. Gelingt es übrigens, durch die oben angedeuteten Versuche das Gold auch zu gewinnen, so wird auch dieser Verlust beseitigt; es geht aber aus dieser Darstellung zugleich hervor, dafs der Nutzen gröfser seyn wird, wenn man das Gold für sich, als wenn man es mit dem Silber verbunden darstellt, weil die Scheidkosten im letzten Falle den Goldwerth beinahe ganz aufheben.

### *h*) Das Ablassen des Amalgams.

Jedes Fafs besitzt zu diesem Zwecke, dem Fülloche gegenüber, eine mit einem messingenen Zapfen verschliefsbare Öffnung von 1 Zoll im Durchmesser, mittelst welcher das Amalgam haltende Quecksilber in ein Gefäfs abgelassen werden kann; ist dieses geschehen, so werden die Rückstände in einen Bottich geleitet, in

welchem sich das noch in demselben befindliche amalgamhältige Quecksilber sammelt, dagegen das unhältige über den Rand des Gefäfses abfliefst.

Es wird nun von dem Schliche durch Waschen befreit, der letzte Antheil Wasser aber mittelst eines Schwamms weggenommen, und in reine Gefäfse gebracht, in welchen es abgewogen wird. Der Gewichtszugang, welchen das Quecksilber erfahren hat, ist gleich der rohen Silbermenge, welche in demselben enthalten ist. Das amalgamhältige Quecksilber wird nun in das Prefszimmer gebracht, während der weitern Bearbeitung des Amalgams werden die Fässer neu gefüllt, in jedes Fafs aber 2 Pfund Eisenkugeln zugetheilt, weil von den 100 Pfunden, welche man der ersten Manipulation zutheilte, diese Menge zu Folge der Manipulation wirklich consumirt wurde, übrigens nach der beschriebenen Weise verfahren, demnach alle 18 Stunden $12 \times 8 = 96$ Centner Erzmehle verquickt werden können. Da aber die Öfen nicht eine so grofse Menge gerösteter Mehle in gleichem Zeitraume erzeugen, so werden gewöhnlich nur 7 Fässer gefüllt.

### *i*) Das Durchseihen des Amalgams und dessen Auspressen.

Der Zweck dieser Operation ist die Scheidung des Amalgams vom Quecksilber; sie findet in Spitzbeuteln von Zwillich Statt, welche auf hölzernen Tenakeln über gufseisernen Kesseln befestigt sind. Man nimmt die Beutel doppelt, giefst das amalgamhältige Quecksilber hinein, und läfst es allmählich durchlaufen; ist diefs geschehen, so wird das zurückgebliebene Amalgam mittelst der Hände ausgeprefst, und in Kugeln geformt.

Das Pressen mit den Händen ist aber schädlich, denn die Wirkungen des Quecksilbers sind nicht zwei-

felhaft; es sollte daher in einer Presse geschehen, welche übrigens von Holz, und der Weinpresse gleich seyn könnte. Die Bildung der Amalgamkugeln ist überflüssig, da es gleichgültig ist, welche Gestalt das ausgeglühte Silber hat.

*k*) Das Ausglühen des Amalgams.

Dieses findet in dem von Hofrath *Born* angegebenen Glühapparate Statt, welchen man in dessen Werke über die Amalgamation abgebildet findet.

Drei solche Apparate stehen neben einander, und fassen bis 700 Pfunde des Amalgams, welches auf die Schüsseln desselben aufgestellt wird.

Die eisernen Cylinder sind hier von Gufseisen, und werden mittelst einer Winde aufgesetzt und abgehoben; sie werden mit einer trockenen Mauer von Backsteinen umgeben, in welcher die nöthigen Luftzüge gelassen sind, und mit Kohle verschüttet.

700 Pfund Amalgam geben gewöhnlich 100 Pfund oder 200 Mark rohes Silber.

Die Schichtung des Amalgams, die Zusammenstellung des Apparates und der Mauer, das Ausglühen und Auskühlen nimmt 24 Stunden in Anspruch.

Der Kohlenverbrauch beträgt dabei 6 bis 7 Mafs, oder 48 bis 54 Kubikfufs. Diese Arbeiten werden von den Probestampfern mit Beihülfe der Anquicker und Anquickjungen verrichtet. Das Werk hat zwei Probestampfer, der eine erhält wöchentlich 3 fl., der andere 2 fl. 30 kr. C. M.

*l*) Das Einschmelzen des Glühsilbers.

Das erzeugte Glühsilber wird alle Monat eingeschmolzen und in Zaine gegossen, welche an das k. k. Münzamt nach Wien versendet werden.

Diese Schmelzung geschieht in grofsen Passauer Tiegeln, das geschmolzene Silber wird mittelst eiserner Löffel in Zaine gegossen, von jedem Gufs etwas auf die Seite gebracht, um einen Probezain zu bilden, welcher durch Abtreiben mittelst Zusatz von Blei auf Silber geprüft wird.

Das Rohsilber enthält gewöhnlich per Mark 8 Loth, seltener 7 Loth 2 Quintchen Silber, das andere ist Kupfer. Der Goldgehalt beträgt in der Mark Silber nur $^1/_4$ Denär, und wird von dem k. Münzamte nicht vergütet.

### *m*) Das Weifssieden des geschmolzenen Silbers.

Da das erzeugte Amalgamirsilber die Hälfte Kupfer enthält, so oxydirt sich dieses an der Oberfläche, und gibt den Zainen eine unansehnliche rothe Farbe, welche man denselben durch das Weifssieden zu benehmen sucht.

Man glüht zu diesem Zwecke die Zaine eine Zeit lang, um das Kupfer auf der Oberfläche in Kupferoxyd umzuwandeln, und kocht sie dann mit einer Auflösung von Weinstein und Natrium-Chlorid.

Auf 500 Mark feines Silber nimmt man hiezu 12 Pf. Weinstein und 4 Pf. Salz.

Soll der Zweck dieses Prozesses erreicht werden, so darf das Glühen der Zaine nicht wegbleiben, weil dadurch Kupferoxyd gebildet ist, und nur dieses, nicht aber das metallische Kupfer im sauren weinsteinsauren Kali löslich ist. Das Natrium-Chlorid kann füglich weggelassen werden, da es die Auflösung des Kupferoxydes nicht befördert, übrigens könnte man denselben Zweck mittelst verdünnter Schwefelsäure wohlfeiler erreichen. Da aber das k. Münzamt die erhaltenen Zaine ohnehin wieder umschmilzt, so dürfte es noch zweckmäfsiger

seyn, diese Arbeit ganz zu unterlassen. Der Silberabgang für sämmtliche Manipulation betrug im Jahre 1830 4 ³/₄ pCt. Da der Gehalt des Silbers in den Rückständen allein 5 pCt. beträgt, so scheint dieser geringere Abgang eine Folge der Ausgleichung der Hütte und der Nichtbeachtung der Denäre; überdieſs darf man nicht übersehen, daſs jede Probe im Kleinen schon einen Abgang einschlieſst.

Der Eisenabgang für jeden Centner Erzmehl beträgt 4 Loth, der Quecksilberabgang für jeden Centner Erzmehl ⁷/₈ Loth; der Verbrauch an Salz 10 pCt., der Verbrauch an Pfannenstein 3 pCt.; der Verbrauch des Holzes zum Wasserwärmen für 100 Centner ¹/₃ Klafter, der Verbrauch der Röstölzer für 100 Centner Erz 8³/₄ Kl.; die eigentlichen Amalgamirkosten per Centner 1 fl. C. M.

Betrachtet man die Reinheit dieser Operation, die vollständige Aufarbeitung der Erze ohne Darstellung silberhältiger Producte, deren Bildung der Einträkprozeſs nicht beseitigen kann, die geringen Amalgamirkosten per 1 fl. 10 kr., oder eigentlich per 1 fl. ohne Unterschied des Silbergehaltes der Erze, die kurze Dauer des Prozesses, den geringen Quecksilberabgang und Brennmaterialsaufwand, die Vortheile, welche aus der erleichterten Übersicht, aus der Möglichkeit einer momentanen Inventur, aus der Entfernung aller Nachtheile, welche Bosheit oder Nachlässigkeit des Arbeiters herbeiführen können, flieſsen, so muſs man selbst bei der Betrachtung, daſs diese Operation bei jeden 1000 Centnern Erzmehle 1 Mark Gold verliert, sich doch für dieselbe erklären, um so mehr, als in dem Falle, daſs das Gold zugleich mit dem Silber gewonnen werden könnte, dem Werke nicht der ganze Werth des Goldes, sondern 312 fl. 30 kr. C. M. für jede Mark desselben weniger zu

Gute käme, da dieser Betrag als Scheidekosten in Abzug gebracht werden müſste.

Da aber auch der Goldabgang zu Folge der neuern Erfahrung wahrscheinlich entfernt wird, so steht demnach der Amalgamation die gröſste Vervollkommnung bevor. Es dürfte nicht überflüssig seyn, hier noch jene Gründe näher zu beleuchten, welche gegen die allgemeine Einführung der Amalgamation aufgestellt werden. Diese sind:

*a*) Die Amalgamirrückstände sind einquintelich, die Rohschlacken des Schmelzprozesses aber nur eindenärig, die Amalgamation muſs daher gröſsere Silberabgänge haben.

*b*) Die Amalgamation kann das Gold nicht gewinnen, und veranlaſst daher gröſsere Goldabgänge.

*c*) Der Durchschnittsgehalt der Erze gestattet keine vortheilhafte Beschickung für die Amalgamation.

a) Die Amalgamationsrückstände enthalten allerdings 3 Denär bis 1 Quintchen an Silber, aber 100 Centner Erzmehle geben nur 95 Ct. Rückstände, und der Silbergehalt der Rückstände beträgt höchstens 5 pCt. Die Roharbeit liefert von 100 Centnern Erz und Schlichen 212 bis 230 Centner Rohschlacken, deren Silbergehalt eindenärig ist, und, wie oben gezeigt wurde, 11.5 pCt. der Silbermenge der Vormaſs beträgt; obwohl daher die Rückstände reicher sind, so ist bei der geringen Menge derselben der Silberabgang doch nicht gröſser, sondern geringer.

b) *Die Amalgamation kann das Gold nicht gewinnen.*

Es ist schon oben nachgewiesen worden, daſs wenn die Amalgamation wirklich das Gold in Verbindung mit dem Silber gewinnen würde, sie doch nur einen geringen Nutzen davon erhielte, da für jede Mark des gewonnenen Goldes 312 fl. 30 kr. an Scheidekosten bezahlt wer-

den müfsten; aber es wurde auch angeführt, dafs die Gewinnung des Goldes aus den Pochgängen schon mit grofsem Vortheil mittelst Amalgamation bereits eingeleitet sey. Da nun kein Grund vorhanden ist, anzunehmen, dafs das Gold der Erze, welches in denselben eben so wie in den Pochgängen gediegen enthalten ist, sich anders verhalten werde, so ist nicht zu zweifeln, dafs auch dieses wird gewonnen werden. Da man aber in diesem Falle das Gold mit einer sehr geringen Silbermenge erhalten wird, so wird man im letztern Falle zwar per Mark à 2 fl. 24 kr. Scheid- und Gaardationskosten bezahlen, da man aber das Gold in höchstens 3 Mark vereinigt, so werden diese nur 7 fl. 12 kr. C. M. per Mark des Goldes betragen, dagegen dieselben 312 fl. 10 kr. betragen würden, wenn man das Gold gleich mit dem Silber gewinnen würde. Der Umstand demnach, dafs das Gold nicht mit dem Silber zugleich amalgamirbar ist, erscheint als wesentlicher Vortheil der Amalgamation, welchen man bis jetzt ganz übersehen hat; und da das Gold wirklich in den Salzburger Goldmühlen amalgamirbar ist, so wird man die göldigen Erze im gepochten Zustande durch diese früher entgolden, dann erst verrösten, und in den *Born*'schen Fässern zu entsilbern haben, oder man wird die entsilberten und göldigen Amalgamirrückstände durch die Quickmühlen leiten, je nachdem durch Versuche das erstere oder das letztere vortheilhafter sich erweisen wird.

c) *Der geringe Durchschnittsgehalt der Erze gestatte nicht ihre Amalgamation.*

Dieser Einwurf wäre allerdings der wichtigste, und er ist auch bei dem bestehenden Einlösungs-Systeme begründet, wenn man die Kiesschliche, deren Zutheilung die Schmelz-Manipulationsweise gebietet, in den Durchschnittsgehalt aufnimmt; da aber die Amalgamation kei-

nen Grund hat, die Menge des Schwefels der Beschickung zu vermehren, dessen Entfernung eigentlich die Röstmanipulation bezweckt, so ist auch deren Einlösung für die Amalgamation überflüssig, und durch ihre Beseitigung wird der Durchschnittsgehalt der Erze alsogleich erhöht.

Berücksichtiget man ferner, daſs das Einlösungssystem der Silberhütten jede Concentration der Erze verhindert, wie oben nachgewiesen wurde, so ist nicht zu zweifeln, daſs bei Gleichstellung der Amalgamirkosten für Erze jedes Gehaltes auch der Berg die Concentration derselben nicht unterlassen werde, indem der geringe Abgang der Cencentration durch die groſse Ersparung der Schmelzkosten hinreichend gedeckt wird.

Es ist deſshalb nicht nöthig, die Kiesschliche ganz aus der Einlösung zu verbannen, indem man sich derselben immer noch vortheilhaft zur Aufarbeitung hältiger Schlacken bedienen könnte; da aber die Gewinnung ihres Silbergehaltes nur mit gröſsern Abgängen möglich ist, so sollen auch bei ihrer Einlösung gröſsere Abgänge berechnet, die silberfreien oder silberarmen Kiesschliche aber gar nicht eingelöst werden.

## II.
## Notiz über das Vorkommen des rhomboëdrischen Wismuthglanzes (Tetradymits, nach *Haidinger*) und des prismatischen Wismuthglanzes zu Retzbanyen;

von

Dr. *Wehrle*, k. k. Bergrath und Prof. in Schemnitz.

---

Zu Folge der Auffindung des Tellurs in einer Varietät des Wismuthglanzes zu Retzbanyen mufste es wünschenswerth erscheinen, auszumitteln, ob dieses Mineral daselbst an einem oder an mehreren Örtern vorkomme, und im letztern Falle, ob alle Varietäten desselben, welche zu Retzbanyen bis jetzt beobachtet wurden, Tellur enthalten.

Ich wendete mich defshalb an Herrn Markscheider von *Szaibely* in Retzbanyen, welchem ich das untersuchte Exemplar verdanke, und erhielt von demselben folgende Auskünfte, welche ich hier nachträglich mittheile.

Jener Wismuthglanz, in welchem ich Tellur fand, kam auf der Grube Markus im Blidarer Gebirge vor, welche im tiefern Niveau der Grube Barbara fast im Thalbette angeschlagen war, ein zertrümmertes, äufserst absätziges Erzlager abbaute, und nun als unbauwürdig aufgelassen ist.

Überdiefs fand schon vor 30 Jahren der k. Waldschaffer und Gewerke, *Martin Straub*, an der westlichen Seite desselben Gebirges, an der Scheidung zwischen Urkalk und Thonschiefer, ein Tagausbeifsen eines stehenden Erzstockes, welcher nebst Wismuth auch Silber, Gold und Kupfer enthielt, unter dem Namen Chri-

stina gemuthet, bis auf eine senkrechte Tiefe von 48 Klafter abgebaut, dann aber aufgelassen wurde, weil er sich in diesem Horizonte verengte, und der Bau sich nicht mehr lohnte. Die Menge des Wismuthes, welchen dieser Erzstock lieferte, war bedeutend, denn es wurde sogar aus den Erzen ausgeschmolzen, und in ziemlich grofsen Mengen in den Handel gebracht. Die Grube selbst ist nun verfallen, und von den Mineralien, welche in derselben vorkamen, nichts mehr vorhanden, so dafs sich nun nicht mehr bestimmen läfst, ob auf derselben nebst octaëdrischem Wismuthe auch noch der Tetradymit oder der prismatische Wismuthglanz vorkam.

In neuerer Zeit wurde auf der nämlichen Christina-Scheidung im abfallenden Gebirgs-Niveau, 120 Klafter von Christina, die St. Barbara-Grube angeschlagen, welche noch bis jetzt bebaut wird; auf dieser kommt im dodecaëdrischen Granat, prismatischen Augitspathe und rhomboëdrischen Kalkhaloide, begleitet vom octaëdrischen und pyramidalen Kupferkies und eisenhältigen Wismuthocker, Wismuthglanz theils in derben Massen, theils eingesprengt, vor.

Man fand dieses Mineral ferner in dem Koschurer Gebirge, welches durch das Retzbanyer Hauptthal von dem Blidarer Gebirge getrennt ist, auf der Grube Segen-Gottes und Gabe-Gottes, letztere jetzt Paraskiva genannt, das Wismuthglanz unter denselben Verhältnissen, wie auf Barbara; endlich fand man dasselbe auf der Grube Kaiser-Raichenstein im Valye-Sakaer-Gebirge, und unterscheidet nach der Verschiedenheit der Textur blätterigen, strahligen, krummschaligen und dichten Wismuthglanz.

Die Untersuchung dieser Varietäten von Wismuthglanz, welche man bis jetzt zu Retzbanyen vorgefunden hat, werde ich mit Nächsten vornehmen können,

da Herr v. *Szaibely* mir gütigst die Zusendung derselben anzeigte.

Durch die Gefälligkeit des Berg-Practikanten, Herrn v. *Somogy*, welcher erst vor einigen Monaten Retzbanyen bereiste, und auf der Grube Barbara etwas von dem Wismuthglanze sammelte, erhielt ich die dichte Varietät, eingewachsen im dodekaëdrischen Granat.

An dem vorliegenden Exemplar ist keine Krystallisation, und nur an einzelnen Stellen Theilbarkeit und stängliche Zusammensetzungsstücke bemerkbar, der Bruch ist uneben, der Glanz metallisch. Die Farbe dunkel bleigrau, ins Stahlgraue sich neigend, der Strich eben so, aber dunkler; es ist etwas milde, die Härte = 2.5, das spec. Gewicht = 6.562.

Vor dem Löthrohre saigern sich metallisch glänzende Tropfen aus demselben, es verbreitet einen Schwefelgeruch, und beschlägt die Kohle gelb, welcher Beschlag aber durch Abkühlung weiſs wird. Die Flamme wird nicht gefärbt. Mit Soda behandelt, gibt es ein glänzendes Metallkorn, welches, für sich behandelt, die Kohle gelb beschlägt.

In Salpetersäure löst es sich vollkommen auf, und hinterläſst bloſs etwas Schwefel- und Granatmasse. Die Auflösung, mit Essigsäure versetzt, gibt mit schwefeligsaurem Ammoniak keinen Niederschlag, es enthält somit kein Tellur.

Mit Chlorwasserstoffsäure versetzt, bildet es einen weiſsen Niederschlag, welcher am Sonnenlichte schwarz wird; mit kohlensaurem Ammoniak entstand eine gelblich weiſse Fällung, und die Flüssigkeit färbte sich blau.

Die chemische Untersuchung lieferte in 100 Theilen desselben

64.25 Wismuth,
21.65 Schwefel,

6.62 Kupfer,
2.71 Silber,
2.15 Eisenoxyd,
1.48 Granatsubstanz.

Da das der Untersuchung unterzogene Exemplar unter der Loupe deutlich eingesprengte Theilchen des Kupferkieses zu erkennen gab, so wird es wahrscheinlich, daſs der dichte Wismuthglanz ein inniges Gemenge von 82.6 $B_2 S^2$ mit Kupferkies sey, welches die Untersuchung der reinern Exemplare, wenn solche anlangen, nachweisen wird, und daſs zu Retzbanyen auſser dem Tetradymit auch ein dem schwedischen ähnlicher Wismuthglanz vorkomme.

## III.

## Bemerkungen zum practischen Gebrauche der Wahrscheinlichkeitsrechnung;

von

*J. J. Littrow.*

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, oder eigentlich die Theorie der kleinsten Quadrate, hat bei der gegenwärtigen Vervollkommnung der Naturwissenschaften, die unmittelbar auf Beobachtungen und Experimenten beruhen, eine so wichtige Rolle übernommen, daſs man beinahe in allen den Fällen, wo die äuſserste Genauigkeit in den Resultaten gesucht wird, ihrer nicht mehr entbehren kann. Die Vorschriften aber, welche für diese Theorie von den beiden bekannten Begründern derselben entwickelt worden sind, scheinen nicht Jedem zugänglich zu seyn, wie man aus den noch immer selte-

nen, und vielleicht noch mehr aus den oft unrichtigen Anwendungen derselben schliefsen darf, die bereits an manchen Orten von ihnen gemacht worden sind. Es wird daher nicht unnütz seyn, wenigstens die vorzüglichsten dieser Vorschriften für die einzelnen, am meisten vorkommenden Fälle, und zwar so zusammen zu stellen, wie sie sich *zu dem practischen Gebrauche* am besten eignen, etwa so, wie man es mit den bekannten Formeln der Trigonometrie schon längst, und gewifs nicht ohne Nutzen, gethan hat, da sie die Anwendung derselben so sehr erleichtern, und nicht nur dem mit der Theorie Unbekannten ihren Gebrauch möglich machen, sondern selbst den Kenner derselben der unangenehmen und zeitraubenden Nothwendigkeit überheben, immer wieder auf die ersten Gründe derselben zurück zu gehen. Die Beweise der verschiedenen hier aufgestellten Ausdrücke wird Jeder, dem es darum zu thun ist, in den bekannten Werken nachsehen, daher sie hier, wo es sich blofs um die practische Brauchbarkeit derselben handelt, übergangen werden können.

## I.

Der Kürze und der leichteren Übersicht wegen wollen wir hier zuerst einige Bezeichnungen einführen, die wir in der Folge immer in derselben Bedeutung gebrauchen werden.

Der wahrscheinlichste Werth einer aus mehreren Beobachtungen zu bestimmenden Gröfse $x, y, z \ldots$ soll durch $X, Y, Z \ldots$ ausgedrückt werden.

Dieses Resultat $X$, oder $Y$, oder $Z \ldots$ wird desto genauer seyn, je gröfser die Anzahl der einzelnen Beobachtungen ist, die man der Untersuchung zu Grunde gelegt hat, je genauer diese Beobachtungen selbst sind, oder je besser sie unter einander harmoniren, und je

vortheilhafter überhaupt die Bestimmung dieses Resultates ist. Diese Umstände bestimmen das *Gewicht* des Resultates, welches wir durch $P$ bezeichnen wollen.

Das gefundene Resultat $X$, oder $Y$, oder $Z$ . . . wird, wenn es gleich das wahrscheinlichste von allen ist, doch noch nicht das *wahre* selbst seyn: es wird also selbst noch einen Fehler haben. Es wird nicht wahrscheinlich seyn, daſs dieser Fehler noch sehr groſs, und z. B. gleich 1 sey: je kleiner aber dieser Fehler angenommen wird, desto gröſser wird auch die Wahrscheinlichkeit seyn, daſs er in der That begangen worden ist, und desto kleiner daher die Wahrscheinlichkeit, daſs er nicht begangen worden ist. Derjenige Fehler aber, dessen Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils gleich ist, d. h. derjenige Fehler, für den es eben so wahrscheinlich ist, daſs man ihn begangen, und daſs man ihn nicht begangen hat, soll der *wahrscheinlichste Fehler* dieses Resultates heiſsen, und durch $F$ bezeichnet werden.

Von ihm unterscheidet sich der *wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung*, der $f$ heiſsen soll, und der offenbar gegen den wahrscheinlichen Fehler $F$ des Resultates aus allen Beobachtungen desto gröſser seyn wird, je gröſser die Anzahl der Beobachtungen ist, welche Anzahl wir immer durch $N$ bezeichnen wollen.

Noch hat man, was eigentlich überflüssig ist, das Wort *Präcision* oder *Genauigkeit* in diese Rechnungen eingeführt. Nennt man nämlich $G$ die Genauigkeit des Resultats $X$, $Y$, $Z$ . . . aus allen Beobachtungen, und $g$ die Genauigkeit einer jeden einzelnen Beobachtung, so hat man

$$\frac{F}{f} = \frac{g}{G};$$

also auch, wenn die Genauigkeit $g$ der einzelnen Beob-

achtungen gleich der Einheit angenommen wird, die Genauigkeit des Resultats

$$G = \frac{f}{F}.$$

Dieſs setzt voraus, daſs alle einzelne Beobachtungen gleich gut angenommen werden, oder daſs sie alle denselben *Werth* haben. Sollten sie von ungleicher Güte seyn, so wollen wir ihre Werthe durch die Gröſsen $c$, $c_1$, $c_2$ . . . ausdrücken.

Immer wird übrigens vorausgesetzt, daſs die Anzahl $N$ der einzelnen Beobachtungen beträchtlich seyn muſs, wenn der Werth $X$, $Y$, $Z$ . . . der Resultate verläſslich seyn soll, wie dieses schon aus der Natur der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorgeht, und wie auch die Werthe des Gewichts $P$ und der Genauigkeit $G$ der Resultate zeigen werden, die immer desto gröſser sind, je gröſser $N$ ist. Endlich muſs noch bemerkt werden, daſs man durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Resultaten $X$, $Y$, $Z$ . . . nur die *zufälligen* Fehler so viel möglich zu entfernen sucht, also z. B. Fehler der unmittelbaren Beobachtung, des Sehens, des Hörens, der Eintheilungen der Instrumente u. dgl., welche Fehler alle in ihrer absoluten Gröſse sowohl, als auch in ihren Zeichen veränderlich, und bald positiv, bald negativ seyn können; nicht aber auch *constante* Fehler, die immer auf *dieselbe* Weise auf die Beobachtungen einwirken, z. B. den sogenannten Collimationsfehler der Instrumente, einen unrichtigen Gefrierpunct des Thermometers u. dgl., welche letzte Gattung von Fehlern daher auf das Sorgfältigste vermieden werden muſs, wenn man in der That auf Annäherung zur Wahrheit Anspruch machen will.

Bekanntlich ist, wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses z. B. gleich $\frac{1}{4}$ ist, die Wahrscheinlichkeit

des Gegentheils oder die Wahrscheinlichkeit, daſs dieses Ereigniſs nicht eintreffen werde, gleich $1 - \frac{1}{4}$ oder gleich $\frac{3}{4}$, was man auch so ausdrücken kann: Es ist 1 gen 4 zu wetten, daſs jenes Ereigniſs eintreffen, und 3 gen 4, daſs es nicht eintreffen wird. Für den oben erwähnten wahrscheinlichsten Fehler $F$ des Resultats wurde gesagt, daſs seine Wahrscheinlichkeit gleich der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils ist. Da also hier für diesen Fehler $F$ beide Wahrscheinlichkeiten gleich sind, und da die Summe beider immer gleich der Einheit ist, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers gleich $\frac{1}{2}$, oder man kann 1 gen 1 wetten, daſs der Fehler des Resultates nicht gröſser sey, als diejenige Zahl, welche wir durch $F$ bezeichnen. Um aber auch noch die Wahrscheinlichkeit für andere, noch kleinere Fehler als $F$, bequem finden zu können, so kann man nach der Ordnung 10 gen 1, 100 gen 1, 1000 gen 1, und 10000 gen 1 wetten, daſs der Fehler des Resultates nicht gröſser sey, als

$$\frac{1.16309}{\sqrt{P}}, \quad \frac{1.82139}{\sqrt{P}}, \quad \frac{2.32767}{\sqrt{P}} \quad \text{und} \quad \frac{2.75106}{\sqrt{P}},$$

wo wieder $P$ das Gewicht des Resultates bezeichnet.

Das Vorhergehende wird hinreichen, den Gebrauch des Folgenden verständlich zu machen.

## II.

Der einfachste und am meisten vorkommende der hieher gehörenden Fälle ist derjenige, wo man eine gewisse Gröſse unmittelbar aus Beobachtungen abzuleiten sucht, wo man z. B. für die gesuchte Ausdehnung eines Metalles, für die Polhöhe eines Ortes, für die auf dieselbe Epoche reducirte Schieſe der Ecliptik u. s. w. mehrere einzelne Beobachtungen hat, die unter einander mehr oder weniger verschieden sind, und von welchen man nun den wahrscheinlichsten Werth sucht.

Nimmt man zuerst an, dafs alle diese Beobachtungen von gleichem Werthe sind, und dafs man für die gesuchte Gröfse in der

ersten Beobachtung den Werth $x$,
zweiten » » » $x_1$,
dritten » » » $x_2$ u. f.

erhalten habe, so ist der wahrscheinlichste Werth dieser Gröfse

$$X = \frac{x + x_1 + x_2 + \ldots}{N} \quad \text{oder} \quad X = \frac{1}{N} \int x,$$

wo $N$ die Anzahl der Beobachtungen bezeichnet. Sucht man dann die Werthe $\varepsilon = X - x$, $\varepsilon_1 = X - x_1$, $\varepsilon_2 = X - x_2$ u. s. w., und nennt man die Summe ihrer Quadrate $\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots = \int \varepsilon^2$, so ist das Gewicht dieser Bestimmung des Resultates $X$ gleich

$$P = \frac{N^2}{2 \int \varepsilon^2},$$

und der wahrscheinliche Fehler dieses Resultates

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung aber

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{N}{P}},$$

und endlich die Genauigkeit (Präcision) dieser Bestimmung des Resultates, wenn man die Genauigkeit der einzelnen Beobachtung als Einheit voraussetzt,

$$G = \sqrt{N}.$$

Um auf diese Ausdrücke ein Beispiel anzuwenden, seyen die beobachteten Polhöhen Wiens gegeben:

$$48^\circ\ 12'\ 33'' = x,$$
$$48^\circ\ 12'\ 34'' = x_1,$$
$$48^\circ\ 12'\ 35'' = x_2.$$

Es ist bereits erinnert worden, dafs man allen diesen Untersuchungen immer eine beträchtlich grofse Zahl von Beobachtungen zu Grunde legen müsse, während wir uns hier der Kürze wegen nur mit kleineren Zahlen von $N$ begnügen. Die angeführten Beobachtungen geben für den wahrscheinlichsten Werth dieser Polhöhe

$$X = \frac{1}{N} \int x = \tfrac{1}{3} \cdot 102'' = 34''.00.$$

Ferner ist

$$\varepsilon = X - x = 1, \quad \varepsilon_1 = X - x_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = X - x_2 = -1,$$

also $\Sigma \varepsilon^2 = 2$, und daher das Gewicht dieser Bestimmung des Resultates von $X$ oder

$$P = 2.25$$

der wahrscheinliche Fehler des Resultats

$$F = 0''.318,$$

die Präcision dieser Bestimmung, die der einzelnen Beobachtung gleich 1 gesetzt,

$$G = 1.732,$$

und endlich der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0''.551.$$

Setzt man dann

$$r = 1.8214 \ldots 2.3277 \ldots 2.7511,$$

so ist $\frac{r}{\sqrt{P}} = 1.214 \ldots 1.552 \ldots 1.834,$

oder man kann 100 oder 1000 oder 10000 gen eins wetten, dafs der in der vorhergehenden Bestimmung von $X$ begangene Fehler kleiner ist als

$$1''.214 \ldots 1''.552 \ldots 1''.834.$$

* * *

Bisher wurde angenommen, dafs alle Beobachtungen unter sich gleiche Werthe haben. Es gebe nun

die erste Beobachtung die Gröſse $x$ mit dem Werthe $c$,
» zweite » » » $x_1$ » » » $c_1$,
» dritte » » » $x_2$ » » » $c_2$ u. ſ.,
so hat man für die Gröſsen $X, P, F \ldots$, wenn man sie hier und immer in der oben angegebenen Bedeutung nimmt, folgende Ausdrücke:

$$X = \frac{c^2 x + c_1^2 x + c_2^2 x + c_3^2 x + \ldots}{c^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots} = \frac{\int c^2 x}{\int c^2}.$$

Ist dann $\varepsilon = X - x$, $\varepsilon_1 = X - x_1$ u. f., so hat man

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\int c^2}{\int c^2 \varepsilon^2}, \quad F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}}, \quad G = \sqrt{\int c^2} \quad \text{und}$$

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\int c^2}{P}}.$$

Überdieſs ist der wahrscheinlichste Fehler der ersten Beobachtung gleich $\frac{f}{c}$, der zweiten gleich $\frac{f}{c_1}$, der dritten gleich $\frac{f}{c_2}$, u. s. w.

Setzt man in diesen Ausdrücken $c = c_1 = c_2 \ldots = 1$, so ist $\int c^2 \varepsilon^2 = \int \varepsilon^2$ und $\int c^2 = N$, und man erhält die Ausdrücke der vorhergehenden Aufgabe.

Es wird meistens schwer seyn, diese Werthe $c, c_1, c_2 \ldots$ der einzelnen Beobachtungen mit einiger Genauigkeit anzugeben. Ist z. B. die erste Beobachtung $x$ das Resultat oder das arithmetische Mittel von $n$ Beobachtungen, und eben so $x_1, x_2 \ldots$ das Mittel von $n_1, n_2 \ldots$ Beobachtungen, so wird man in den vorhergehenden Ausdrücken

$$c = \sqrt{n}, \quad c_1 = \sqrt{n_1}, \quad c_2 = \sqrt{n_2} \text{ u. f. setzen.}$$

*Ex.* Seyen die vorigen Polhöhen gegeben, aber
die erste . $x = 48^\circ\, 12'\, 33''$ das Resultat aus einer einzigen Beobachtung,
die zweite $x_1 = 48^\circ\, 12'\, 34''$ das Resultat aus vier Beobachtungen,

die dritte $x_2 = 48^0\, 12' 35''$ das Resultat aus neun Beobachtungen,

so ist $c = 1$, $c = \sqrt{4} = 2$, $c_2 = \sqrt{9} = 3$, und daher $c^2 x = 33$, $c_1^2 x = 136$, $c_2^2 x = 315$, $\int c^2 x = 484$, $\int c^2 = 14$ und

$$X = \frac{\int c^2 x}{\int c^2} = 34''.571.$$

Weiter ist

$$\varepsilon = X - x = 1.571\,, \quad \varepsilon_1 = 0.571\,, \quad \varepsilon_2 = -0.429,$$

also $\int c^2 \varepsilon^2 = 5.428$, also auch

$$P = 3.959, \quad F = 0.240, \quad G = 3.742, \quad f = 0.415,$$

und der wahrscheinliche Fehler

der ersten Beobachtung $\frac{f}{c} = 0.415$,

» zweiten » $\frac{f}{c'} = 0.207$,

» dritten » $\frac{f}{c_2} = 0.138$.

Setzt man endlich

$$r = 1.8214 \;.\;.\;.\; 2.3277 \;.\;.\;.\; 2.7511\,,$$

so ist $\frac{r}{\sqrt{P}} = 0.91 \;.\;.\;.\;.\; 1.17 \;.\;.\;.\;.\; 1.38$,

und man kann 100, 1000, 10000 gen 1 wetten, dafs der Fehler dieser Bestimmung von $X$ nicht gröfser ist als

$$0''.91 \;.\;.\;.\;.\; 1''.17 \;.\;.\;.\;.\; 1''.38.$$

## III.

Bisher war die Gröfse $x$ unmittelbar durch die Beobachtung gegeben. Nimmt man nun an, dafs der schon beinahe bekannte Werth einer Gröfse durch irgend einen analytischen Ausdruck, durch eine sogenannte Formel gegeben ist, und dafs man die Verbesserung $x$ dieser Formel suche, so kommt man auf die sogenannten Bedingungsgleichungen, welche bekanntlich alle, wenn

nur eine einzige Gröſse $x$ gesucht wird, auf die einfache linearische Form

$$o = ax - \delta$$

gebracht werden können, in welcher $a$ der durch jene Formel zu bestimmende, von einer Beobachtung zur andern sich ändernde Coefficient von $x$, und in welcher $\delta$ die Differenz der Resultate der Beobachtung und der Berechnung durch die erwähnte Formel bezeichnet. Da aber diese Beobachtung selbst nicht als ganz fehlerfrei angenommen werden kann, so wollen wir ihren, obschon noch unbekannten, Fehler durch $\varepsilon$ bezeichnen, wodurch daher die Bedingungsgleichung die Form erhält

$$\varepsilon = ax - \delta.$$

Für eine zweite, dritte Beobachtung... erhält man eben so

$$\varepsilon_1 = a_1 x - \delta_1,$$
$$\varepsilon_2 = a_2 x - \delta_2, \text{ u. s. w.}$$

Um nun aus allen diesen $N$ Gleichungen den wahrscheinlichsten Werth $X$ der gesuchten Gröſse $x$, das Gewicht $P$ dieser Bestimmung u. s. w. zu finden, hat man, wenn

$$\int a^2 = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots, \int a\delta = a\delta + a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + \ldots$$

ist,

$$X = \frac{\int a\delta}{\int a^2}, \quad \int \varepsilon^2 = \int \delta^2 - \frac{(\int a\delta)^2}{\int a^2}, \quad P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\int a^2}{\int \varepsilon^2},$$

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}}, \quad G = \sqrt{\int a^2} \text{ und } f = 0.47694 \sqrt{\frac{\int a^2}{P}}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $a = a_1 = a_2 \ldots = 1$ und $\delta = x$, $\delta_1 = x_1$, $\delta_2 = x_2$; so erhält man, da $\int a^2 = N$ wird, die Ausdrücke von Nro. II. wieder.

*Ex.* Sind die Bedingungsgleichungen gegeben:

$$\varepsilon = 2.1\,x - 2.5,$$
$$\varepsilon_1 = 3.2\,x - 5.0,$$

$$\varepsilon_2 = 2.4x - 4.5,$$
$$\varepsilon_3 = 3.0x - 5.0,$$
$$\varepsilon_4 = 3.5x - 4.1,$$

so hat man $\int a^2 = 48.66$, $\int \delta^2 = 93.31$, $\int a\delta = 66.40$ und $N = 5$, also $\int \varepsilon^2 = 2.7025$ und

$$X = 1.3646,\quad P = 45.014,\quad F = 0.071,$$
$$G = 6.976,\quad f = 0.496,$$

und man kann 100 gen 1 oder 1000 gen 1 wetten, dafs der Fehler von $X$ nicht gröfser als 0.27 oder als 0.35 ist.

Das Vorhergehende setzt voraus, dafs die Werthe aller einzelnen Beobachtungen gleich grofs sind. Hat aber die 1ste Bedingungsgleichung $\varepsilon = ax - \delta$ den Werth $c$,
» 2te » $\varepsilon_1 = a_1x - \delta_1$ » » $c_1$,
» 3te » $\varepsilon_2 = a_2x - \delta_2$ » » $c_2$ u. f.

so ist $$X = \frac{\int c^2 a\delta}{\int c^2 a^2},$$

und wenn $\varepsilon = aX - \delta$, $\varepsilon_1 = a_1X - \delta_1 \ldots$ gesetzt wird,

$$P = \frac{N}{2}.\frac{\int c^2 a}{\int c^2 \varepsilon^2},\quad F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},\quad G = \sqrt{\int c^2 a^2},$$
$$f = 0.47694\sqrt{\frac{\int c^2 a^2}{P}}.$$

*Ex.* Ist die Gleichung

$\varepsilon = 2x - 2.5$ aus einer,
$\varepsilon_1 = 3x - 5.0$ aus vier,
$\varepsilon_2 = 4x - 6.0$ aus neun Beobachtungen genommen worden, so ist $c = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, und daher

$$\int c^2 a^2 = 184,\quad \int c^2 a\delta = 281,\quad X = 1.52717,$$
$$\varepsilon = aX - \delta = 0.5543,\quad \varepsilon_1 = -0.4184,\quad \varepsilon_2 = 0.1088,$$

also auch

$$\int c^2 \varepsilon^2 = 1.1141 \quad \text{und} \quad F = 247.726,\quad F = 0.0303,$$
$$G = 13.565,\quad f = 0.4110.$$

Man kann aber auch bequemer diesen Fall auf den

vorigen, wo alle Werthe $c$, $c_1$, $c_2$ . . . gleich sind, zurückführen, wenn man die gegebenen Bedingungsgleichungen, aufser den $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ . . ., durch diese Werthe $c$, $c_1$, $c_2$ . . . multiplicirt, und dann die Werthe von $X$, $P$, $F$... nach den ersten Ausdrücken der Nro. III. sucht. So hat man in dem letzten Beispiele

$$\varepsilon = 2x - 2.5,$$
$$\varepsilon_1 = 6x - 10.0,$$
$$\varepsilon_2 = 12x - 18.0,$$

und da jetzt die Werthe aller Bedingungsgleichungen dieselben sind, so ist

$$\int a^2 = 184, \quad \int \delta^2 = 430.25, \quad \int a\delta = 281,$$

und daher

$$X = \frac{\int a\delta}{\int a^2} = 1.52717, \quad \int \varepsilon^2 = 1.1142, \quad P = 247.7,$$
$$F = 0.03030, \quad G = 13.565, \quad f = 0.4110$$

wie zuvor.

## IV.

Will man aber zwei Gröfsen $x$ und $y$ zugleich durch eine Anzahl von Beobachtungen bestimmen, so haben die Bedingungsgleichungen die Form

$$\varepsilon = ax + by - \delta,$$
$$\varepsilon_1 = a_1 x + b_1 y - \delta_1,$$
$$\varepsilon_2 = a_2 x + b_2 y - \delta_2, \text{ u. f.}$$

Nennt man dann $K = \int a^2 \int b^2 - (\int ab)^2$, so sind die wahrscheinlichsten Werthe von $x$ und $y$, die wir durch $X$ und $Y$ bezeichnen,

$$X = \frac{\int b^2 \int a\delta - \int ab \int b\delta}{K} \quad \text{und} \quad Y = \frac{\int a^2 \int b\delta - \int ab \int a\delta}{K}.$$

Sey nun

$$\varepsilon = aX + bY - \delta,$$
$$\varepsilon_1 = a_1 X + b_1 Y - \delta_1,$$
$$\varepsilon_2 = a_2 X + b_2 Y - \delta_2, \text{ u. s. w.},$$

so ist das Gewicht der vorhergehenden Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes von $X$ und $Y$

$$P_x = \frac{N}{2} \cdot \frac{K}{\int b^2 \int \varepsilon^2} \quad \text{und} \quad P_y = \frac{N}{2} \cdot \frac{K}{\int a^2 \int \varepsilon^2}.$$

Die wahrscheinlichsten Fehler dieser beiden Resultate aber sind

$$\text{für} \quad X \ldots F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{P_x}},$$

$$\text{und für} \quad Y \ldots F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{P_y}}.$$

Die Genauigkeit dieser beiden Bestimmungen aber ist

$$\text{für} \quad X \ldots G_x = \sqrt{\frac{K}{\int b^2}},$$

$$\text{und für} \quad Y \ldots G_y = \sqrt{\frac{K}{\int a^2}}.$$

Endlich ist der Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{2 \int \varepsilon^2}{N}}.$$

*Ex.* Sind die Bedingungsgleichungen gegeben:

$$\varepsilon = x + y - 3,$$
$$\varepsilon_1 = x - 2y + 4,$$
$$\varepsilon_2 = 3x = y - 2,$$

so hat man

$$\int a^2 = 11, \ \int b^2 = 6, \ \int ab = -4, \ \int b\delta = 9, \ \int a\delta = 5$$
$$\text{und} \quad K = 50,$$

also sind die wahrscheinlichsten Werthe

$$\text{von} \quad x \ldots X = 1.32000,$$
$$\text{und von} \quad y \ldots Y = 2.38000.$$

Damit findet man $\varepsilon = 0.70$, $\varepsilon_1 = 0.56$, $\varepsilon_2 = -0.42$ und $\int \varepsilon^2 = 0.9800$, also auch

$$P_x = 12.755, \quad P_y = 6.957,$$
$$F_x = 0.133, \quad F_y = 0.181,$$
$$G_x = 2.887, \quad G_y = 2.132,$$
$$f = F_x G_x = F_y G_y = 0.385.$$

Man sieht, dafs in diesem Beispiele die Gröfse $X$ beträchtlich genauer bestimmt ist als $Y$, und zwar in dem Verhältnisse von 1.354 zu 1. Auch kann man, nach dem Vorhergehenden, 1000 gen 1 wetten, dafs der Fehler von $X$ nicht gröfser als 0.67, und dafs der Fehler von $Y$ nicht gröfser als 0.88 ist.

Hätten endlich die aufgestellten Bedingungsgleichungen z. B. die Werthe $c = 2$, $c_1 = 3$ und $c_2 = 4$, so hätte man

$$\varepsilon = 2x + 2y - 6,$$
$$\varepsilon_1 = 3x - 6y + 12,$$
$$\varepsilon_2 = 12x - 4y - 8,$$

und man würde mit diesen so veränderten Gleichungen ganz wie zuvor verfahren, um die Gröfsen $X$, $Y$, $P_x$, $P_y$ u. s. w. zu bestimmen.

## V.

Sind endlich drei Gröfsen $x$, $y$, $z$ zugleich durch eine Reihe von Beobachtungen zu bestimmen, so haben die Bedingungsgleichungen die Form:

$$\varepsilon = ax + by + cz - \delta,$$
$$\varepsilon_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z - \delta_1,$$
$$\varepsilon_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z - \delta_2, \text{ u. f.}$$

Diefs vorausgesetzt, findet man die wahrscheinlichsten Werthe $X$, $Y$, $Z$ dieser drei Gröfsen durch die Elimination aus den drei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 0 = X\int a^2 + Y\int ab + Z\int ac - \int a\delta, \\ 0 = X\int ab + Y\int b^2 + Z\int bc - \int b\delta, \\ 0 = X\int ac + Y\int bc + Z\int c^2 - \int c\delta. \end{array}\right\} \cdot (1)$$

Kennt man so die Werthe von $X$, $Y$ und $Z$, so sucht man die Gröfsen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ aus den Gleichungen

$$\varepsilon = aX + bY + cZ - \delta,$$
$$\varepsilon_1 = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z - \delta_1, \text{ u. f.},$$

und man hat für die Gewichte dieser drei Bestimmungen

$$P_x = \frac{N}{2\int\varepsilon^2} \cdot \frac{K}{\int b^2 \int c^2 - (\int b\,c)^2},$$

$$P_y = \frac{N}{2\int\varepsilon^2} \cdot \frac{K}{\int a^2 \int c^2 - (\int a\,c)^2},$$

$$P_z = \frac{N}{2\int\varepsilon^2} \cdot \frac{K}{\int a^2 \int b^2 - (\int a\,b)^2},$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$K = \int a^2 . \int b^2 . \int c^2 - \int a^2 . (\int bc)^2 - \int b^2 . (\int ac)^2 - \int c^2 . (\int ab)^2 + 2\int a\,b\,.\int a\,c\,.\int b\,c.$$

Die wahrscheinlichsten Fehler dieser drei Resultate $X$, $Y$, $Z$ sind

$$F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{P_x}},\quad F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{P_y}},\quad F_z = \frac{0.47694}{\sqrt{P_z}},$$

und die Präcision dieser drei Bestimmungen ist

$$G_x = \sqrt{\frac{2P_x . \int\varepsilon^2}{N}},\quad G_y = \sqrt{\frac{2P_y . \int\varepsilon^2}{N}},\quad G_z = \sqrt{\frac{2P_z . \int\varepsilon^2}{N}}$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694\sqrt{\frac{2\int\varepsilon^2}{N}}.$$

*Ex.* Seyen die Bedingungsgleichungen gegeben

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= x + y - 2z - 1,\\
\varepsilon_1 &= x - 3y + z - 3,\\
\varepsilon_2 &= 2x + y - 3z - 2,\\
\varepsilon_3 &= x - 4y + z - 3,
\end{aligned}$$

so hat man

$$\begin{aligned}
\int a^2 &= 7, & \int a\,b &= -4, & \int b\,c &= -12,\\
\int b^2 &= 27, & \int a\,c &= -6, & \int b\,\delta &= -18,\\
\int c^2 &= 15, & \int a\,\delta &= +11, & \int c\,\delta &= -2,
\end{aligned}$$

und daher die Gleichungen (1)

$$\begin{aligned}
0 &= 7X - 4Y - 6Z - 11,\\
0 &= 4X - 27Y + 12Z - 18,\\
0 &= 6X + 12Y - 15Z - 2,
\end{aligned}$$

woraus sofort die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe folgen:

$$X = 1.9231, \quad Y = -0.1538, \quad Z = 0.5128.$$

Mit diesen Werthen aber erhält man

$$\varepsilon = -0.2563,$$
$$\varepsilon_1 = -0.1027,$$
$$\varepsilon_2 = +0.1540,$$
$$\varepsilon_3 = +0.0511,$$

also $\int \varepsilon^2 = 0.1025$ und $K = 39$.

Man hat daher für die Gewichte dieser drei Bestimmungen:

$$P_x = 2.914, \quad P_y = 11.021, \quad P_z = 4.396.$$

Für die wahrscheinlichsten Fehler dieser drei Resultate erhält man

$$F_x = 0.279, \quad F_y = 0.144, \quad F_z = 0.227,$$

und für die Präcision dieser Bestimmungen

$$G_x = 0.386, \quad G_y = 0.752, \quad G_z = 0.475.$$

Endlich ist der wahrscheinlichste Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.108.$$

Die Verläſslichkeit dieser drei Bestimmungen ist der Art, daſs man 1000 gen 1 wetten kann, daſs der Fehler

von $X$ kleiner als 1.36,
» $Y$ » » 0.70,
» $Z$ » » 1.11

ist, so daſs also die Gröſse $Y$ unter allen am besten, und beinahe doppelt so sicher als $X$ bestimmt ist.

Wären die gegebenen Bedingungsgleichungen von verschiedenem Werthe, und z. B. der Werth der ersten doppelt so groſs als der aller übrigen, so würde man statt der ersten die Gleichung

$$\varepsilon = 2x + 2y - 4z - 2$$

setzen, und die übrigen ungeändert lassen, und endlich diese Gleichungen nach dem so eben gezeigten Verfahren behandeln.

Es wird nicht nothwendig seyn, diese Ausdrücke auf mehr als drei Gröſsen fortzuführen, da die bisher angegebenen Fälle bei weitem am häufigsten vorkommen. Die Gründe der hier aufgestellten Ausdrücke wird man übrigens leicht aus den schönen Abhandlungen ableiten können, welche Hr. Dr. *Hauber* über diesen Gegenstand in diesen Blättern mitgetheilt hat.

---

## IV.

## Über die perspectivischen Projectionen der Erd- und Himmelskarten;

von

*J. J. Littrow.*

---

Diese Projectionen geben bekannlich die Abbildung der Oberfläche einer Kugel auf einer Ebene, wie diese Oberfläche einem Auge erscheinen würde, welches die Kugel aus irgend einem gegebenen Puncte betrachtet. Gewöhnlich steht die Projectionsebene auf demjenigen Durchmesser der Kugel senkrecht, welche den Mittelpunct derselben mit dem Auge des Beobachters verbindet; eine Voraussetzung, die wir auch hier annehmen wollen.

Man kennt bisher nur drei dieser Projectionsarten. In der *orthographischen* Projection steht das Auge in einer unendlichen Entfernung von der Kugel, und die Projectionsebene berührt die Kugel auf ihrer vorderen oder hinteren Seite. In der *stereographischen* Projection

ist das Auge in der Oberfläche der Kugel, und die Projectionsebene geht durch den Mittelpunct derselben. In der *centralen* Projection endlich ist das Auge im Mittelpuncte der Kugel, und die Projectionsebene berührt dieselbe.

Alle Schriften, welche diesen Gegenstand behandeln, haben, so viel mir bekannt, nur diese drei Gattungen von perspectivischen Projectionen und überdieſs jede derselben abgesondert betrachtet, als ob sie nichts unter sich gemein hätten. Es ist aber leicht, nicht nur diese drei, sondern überhaupt alle möglichen perspectivischen Projectionen unter einen gemeinschaftlichen Gesichtspunct zu bringen, und dadurch von dem hieher gehörenden Probleme eine allgemeine Auflösung zu geben.

Sey $C$ (Fig. 30) der Mittelpunct der abzubildenden Kugel, z. B. der Erde, und $P$ der eine Pol des Äquators derselben. Den Halbmesser dieser Kugel wollen wir für die Einheit annehmen. Auf dem verlängerten Durchmesser $EZ$ der Kugel nehme man $CA = a$ und $CB = b$, wo $a$ der Ort des Auges und $B$ der Ort ist, wo die Projectionsebene $Bnm$, die auf $ACB$ senkrecht steht, diese Linie $ACB$ schneidet.

Sey $M$ irgend ein Punct der Oberfläche der Kugel, dessen Projection $m$ man sucht. Der Punct $M$ sey durch seine Äquatorshöhe $PM = 90 - \varphi$ und durch seine geographische Länge $ZPM = \lambda$ gegeben, wo $PZ$ irgend ein Meridian der Erde ist, den man hier als den ersten betrachtet, oder von dem man die geographischen Längen zu zählen anfängt. Die Entfernung des Punctes $Z$ der Kugel, der von dem Auge $A$ am meisten absteht, von dem Pole $P$ sey durch den Bogen $PZ = \alpha$ gegeben, und überdieſs sey $ZM = \theta$ und $PZM = \psi$.

Dieses vorausgesetzt, schneide die Ebene, durch

$ACZP$ verlängert, die Projectionsebene in der Linie $Bn$, welche Linie wir für die Axe der $x$ annehmen wollen. Eben so schneide die Ebene $ACZM$ die Projectionsebene in der Linie $Bm$, wo $m$, wie bereits erinnert, die Projection von $M$ ist. Man ziehe in der Projectionsebene die Linie $mn$ senkrecht auf $Bn$, und setze $Bn = x$ und $nm = y$.

Nach diesen Vorbereitungen reducirt sich daher unser Problem darauf, die Gröfsen $x$ und $y$ oder die Coordinaten der Projection des Punctes $M$ durch die geographische Länge $\lambda$ und Breite $\varphi$ dieses Punctes und durch die gegebenen Gröfsen des Problems auszudrücken.

Zu diesem Zwecke suche man zuerst die Linie $Bm$. In dem Dreiecke $DCM$ hat man $D + M = ACD + MCZ$, oder da $D = M$ und $MCZ = \theta$ ist, $D = \frac{1}{2}(\theta + ACD)$. Da aber $AZ$ und $AM$ zwei Secanten der Kugel sind, so ist der Winkel

$$A = \tfrac{1}{2}(\text{Bog.}\, ZM - \text{Bog.}\, DE) = \tfrac{1}{2}(\theta - ACD),$$

woraus folgt

$$D = \theta - A \quad \text{und} \quad ADC = 180 - D = 180 - (\theta - A).$$

Weiter hat man in dem Dreiecke $ACD$

$$\sin. ADC = a \sin. A \quad \text{oder} \quad \sin.(\theta - A) = a \sin. A,$$

oder endlich

$$\text{tang.} A = \frac{\sin.\theta}{a + \cos.\theta},$$

und daher die gesuchte Linie

$$Bm = BA \,.\, \text{tang.} A = \frac{(a+b)\sin.\theta}{a + \cos.\theta}.$$

Ist so die Gröfse von $Bm$ bekannt, so hat man, da ihre Lage durch den Winkel $mBn = 180 - \psi$ gegeben ist,

$$x = -Bm \cos.\psi \quad \text{und} \quad y = Bm \sin.\psi,$$

oder wenn man substituirt,

$$x = -\frac{(a+b)\sin.\theta\cos.\psi}{a+\cos.\theta} \text{ und } y = \frac{(a+b)\sin.\theta\sin.\psi}{a+\cos.\theta}.$$

Auf diese Weise sind die gesuchten Coordinaten $x$ und $y$ der Projection von $M$ durch die Gröfsen $\theta$ und $\psi$ ausgedrückt. Zu unserem Zwecke sollen sie aber durch die gegebenen Gröfsen $\lambda$ und $\varphi$ ausgedrückt werden. Um diese Transformation zu erhalten, hat man in dem sphärischen Dreiecke $PZM$

$$\cos.\theta = \cos.\alpha\sin.\varphi + \sin.\alpha\cos.\varphi\cos.\lambda,$$
$$\sin.\theta\cos.\psi = \sin.\alpha\sin.\varphi - \cos.\alpha\cos.\varphi\cos.\lambda,$$
$$\sin.\theta\sin.\psi = \cos.\varphi\sin.\lambda.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den vorhergehenden Werthen von $x$ und $y$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(a+b)(\cos\alpha\cos.\varphi\cos.\lambda - \sin.\alpha\sin.\varphi)}{a+\sin.\alpha\cos.\varphi\cos.\lambda+\cos.\alpha\sin.\varphi} \\ y &= \frac{(a+b)\cos.\varphi\sin.\lambda}{a+\sin.\alpha\cos.\varphi\cos.\lambda+\cos.\alpha\sin.\varphi}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

und diefs sind die *allgemeinen* Ausdrücke für jede perspectivische Projection.

Für die orthographische Projection hat man, da nach der oben gegebenen Erklärung derselben das Auge in einer unendlichen Entfernung von der Kugel steht, und die Tafel durch den Punct $Z$ geht, $a = \infty$ und $b = \pm 1$, also auch aus den Gleichungen (1)

$$x = \pm(\cos.\alpha\cos.\varphi\cos.\lambda - \sin.\alpha\sin.\varphi),$$
$$y = \pm\cos.\varphi\sin.\lambda,$$

das obere oder untere Zeichen, wenn die Projectionstafel die Kugel auf der von dem Auge abgewendeten oder auf der dem Auge zugekehrten Seite berührt.

Für die stereographische Projection ist das Auge in $E$ und die Tafel in $C$, also $a = 1$ und $b = 0$, und daher

$$x = \frac{\cos. \alpha \cos. \varphi \cos. \lambda - \sin. \alpha \sin. \varphi}{1 + \sin. \alpha \cos. \varphi \cos. \lambda + \cos. \alpha \sin. \varphi},$$

$$y = \frac{\cos. \varphi \sin. \lambda}{1 + \sin. \alpha \cos. \varphi \cos. \lambda + \cos. \alpha \sin. \varphi}.$$

Für die Centralprojection endlich ist das Auge in $C$ und die Tafel in $Z$, also $a = 0$ und $b = 1$, und daher

$$x = \frac{\cos. \alpha \cos. \varphi \cos. \lambda - \sin. \alpha \sin. \varphi}{\sin. \alpha \cos. \varphi \cos. \lambda + \cos. \alpha \sin. \varphi},$$

$$y = \frac{\cos. \varphi \sin. \lambda}{\sin. \alpha \cos. \varphi \cos. \lambda + \cos. \alpha \sin. \varphi},$$

welche Ausdrücke mit den für diese drei Projectionen bisher gegebenen übereinstimmen. Es ist aber für sich klar, dafs die allgemeinen Gleichungen (1) noch mehrere, und überhaupt alle möglichen perspectivischen Projectionsarten enthalten, die man durch die verschiedenen Werthe erhalten wird, welche man den Gröfsen $a$ und $b$ geben kann.

Setzt man dann in den so erhaltenen Ausdrücken die Gröfse $\alpha = 0$, so geben jene Gleichungen die sogenannte Polarprojection, wo $Z$ der Pol des Äquators ist. Setzt man aber $\alpha = 90^\circ$, so erhält man die Äquatorialprojection, für welche das Auge in der Ebene des Äquators steht. Eliminirt man aus den Gleichungen (1) die Gröfse $\lambda$, so erhält man die Gleichung für die Projectionen der Parallelkreise zwischen den Coordinaten $x$ und $y$, und eliminirt man aus ihnen die Gröfse $\varphi$, so erhält man die Gleichungen der Projectionen der Meridiane; Eliminationen, die man leicht ausführen kann, die ich aber hier, als nicht zu meinem Zweck gehörend, übergehe.

## V.

# Analytische Optik;

von

*L. Schleiermacher,*

Groſsherzogl. Hessisch. Oberfinanzrath in Darmstadt.

(Fortsetzung.)

### Glieder der dritten Ordnung, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen.

10) Die Glieder der zweiten Ordnung reichen gewöhnlich hin, um die Abweichung wegen der Gestalt auf eine sehr genäherte Weise zu berechnen, so daſs man sich erlauben kann, die Glieder aller folgenden Ordnungen zu vernachlässigen.

Indessen erfordert die Theorie der achromatischen Objective, wie ich bereits oben gesagt habe, daſs man die Entwickelung bis zu den Gliedern der dritten Ordnung fortsetzt. Da aber hierdurch sehr weitläuftige Rechnungen herbeigeführt werden, so kann man sich begnügen, nur diejenigen Glieder der dritten Ordnung zu berechnen, welche merkliche Werthe erhalten. Zu diesem Ende bemerke ich zuerst, daſs diejenigen von dem Objective herrührenden Glieder, welche $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ enthalten, mit der Vergröſserung multiplicirt sind und hierdurch viel gröſser werden, als diejenigen, welche mit $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{f}$ multiplicirt sind. Man kann daher diese letztern in den Gröſsen der dritten Ordnung vernachlässigen. Um jedoch den Einfluſs, welchen eine Veränderung in der Entfernung des durch das Instrument betrachteten Gegenstandes auf die Abweichungen äuſsert, mit gröſserer Genauigkeit berechnen zu können, werde

ich alle Glieder der dritten Ordnung beibehalten, welche mit $\Delta \frac{1}{c_1}$ multiplicirt sind, und selbst diejenigen hinzufügen, welche das Quadrat dieser Gröfse enthalten, ohne zugleich von $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{f}$ abzuhängen. Da ferner die achromatischen Objective aus Linsen bestehen, deren Dicke und Entfernung von einander sehr gering ist, so kann man in Bezug auf das Objectiv bei den Gliedern der dritten Ordnung die Entfernung der auf einander folgenden brechenden Flächen vernachlässigen, welche in dem Vorhergehenden mit dem Buchstaben $d$ bezeichnet worden sind. Endlich vernachlässige ich alle Glieder der dritten Ordnung, welche von den Ocularen, d. h. von allen auf das Objectiv folgenden brechenden Flächen herrühren, indem diese Glieder als zur vierten Ordnung gehörig betrachtet werden können.

Untersucht man daher nur die Lage der Strahlen in der Nähe des letzten Bildes, in welchem Falle die Gleichungen (d) von Nro. 5 ihre Anwendung finden, so folgt aus dem eben Gesagten, dafs es hinreicht, die Gröfsen $\Delta^2 \frac{1}{g_i}$ und $\left(Y \Delta^2 \frac{1}{g} - \Delta^2 \frac{f}{g}\right)_i$ zu berechnen, indem man alle Glieder vernachlässigt, welche sich eines Theils auf das Objectiv beziehen und mit $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{f}$ multiplicirt, von $\Delta \frac{1}{c_1}$ aber unabhängig sind, andern Theils von den folgenden brechenden Flächen herrühren.

11) Die Berechnung von $\Delta^2 \frac{1}{g_i}$ fange ich damit an, dafs ich die Gröfse $\mathfrak{S}$, welche durch den Ausdruck (d) von Nro. 2 gegeben ist, in eine Reihe entwickle, die nach steigenden Potenzen von $\mathfrak{Z}$ und den zu derselben Ordnung gehörigen Gröfsen geordnet ist. Da $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ von der ersten Dimension in Bezug auf diese Gröfsen

sind, so hat man, wenn man nur das Quadrat derselben beibehält,

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})(\mathfrak{t} - \mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2} - \mathfrak{w}\right) - \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2}$$
$$+ \frac{\mathfrak{k}\,\mathfrak{u}^2}{8\,n} - \mathfrak{w}\left[(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(\mathfrak{t}-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2} - \mathfrak{w}\right)\right] - \frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}^3}.$$

Eine erste Näherung gibt aber mit Vernachlässigung des Quadrats der zur Ordnung von $\mathfrak{Z}$ gehörigen Gröfsen:

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h} - \frac{\mathfrak{k}}{n} + \mathfrak{G}$$
$$= \mathfrak{k} + \mathfrak{h} - \frac{\mathfrak{k}}{n} + (\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(\mathfrak{t}-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2} - \mathfrak{w}\right) - \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2},$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2} = \mathfrak{Z}\left(\mathfrak{k} + \mathfrak{h} - \frac{\mathfrak{k}}{n}\right)^2$$
$$+ \frac{2\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}}\left[(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(\mathfrak{t}-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2} - \mathfrak{w}\right) - \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2}\right].$$

Substituirt man diesen Werth in dem vorhergehenden Ausdrucke von $\mathfrak{G}$, und verwechselt $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ mit $(\mathfrak{t} + t')$, $(\mathfrak{u} + u')$ und $(\mathfrak{w} + w')$, so dafs künftig unter $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ die Gröfsen von der Ordnung $\mathfrak{Z}$, unter $t'$, $u'$ und $w'$ dagegen die von der Ordnung $\mathfrak{Z}^2$ verstanden werden, so erhält man:

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(\mathfrak{t}-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2} - \mathfrak{w}\right) - \mathfrak{Z}\left(\mathfrak{k}+\mathfrak{h}-\frac{\mathfrak{k}}{n}\right)^2$$
$$+ (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})(t' - w') - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{u'}{2} - w'\right) + \frac{\mathfrak{k}\,\mathfrak{u}^2}{8\,n}$$
$$- \left(\mathfrak{w} + \frac{2\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}}\right)\left[(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(\mathfrak{t}-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2} - \mathfrak{w}\right)\right] + \frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}^3}$$

Die erste Zeile ist der Werth von $G$ unter der Bedingung, dafs darin alle lateinischen Buchstaben mit den correspondirenden deutschen verwechselt, d. h. dafs allen durch die erste Näherung erhaltenen Gröfsen ihre mit der Charakteristik $\Delta$ bezeichneten Correctionen zugesetzt werden. Nach der angenommenen Bezeichnung

ist daher jene erste Zeile $= G + \Delta G$. Ferner kann man in den Gliedern von der Ordnung $\mathfrak{Z}^2$ die deutschen Buchstaben mit lateinischen verwechseln. Setzt man daher zur Abkürzung

$$G' = (k+h)(t'-w') - \frac{k}{n}\left(\frac{u'}{2} - w'\right) + \frac{k u^2}{8n}$$
$$-\left(w + \frac{2Z}{g}\right)\left[(k+h)(t-w) - \frac{k}{n}\left(\frac{u}{2} - w\right)\right] + \frac{Z^2}{g^3} \quad \text{(a)}$$

so wird

$$\mathfrak{G} = G + \Delta G + G' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

Der Werth von $G$ ist durch die Formel (b) von Nro. 7 gegeben, nämlich

$$G = -\left[A \cdot 2aZ + BY\frac{hb}{n} + C\left(\frac{hb}{n}\right)^2\right].$$

Hieraus erhält man, wenn man alle Gröſsen um ihre mit der Charakteristik $\Delta$ bezeichneten Correctionen variiren läſst:

$$\Delta G = -\left\{\begin{array}{l} 2aZ\Delta A + Y\frac{hb}{n}\Delta B + \left(\frac{hb}{n}\right)^2 \Delta C \\ + A \cdot 2a\Delta Z + B\frac{hb}{n}\Delta Y \\ + \left(\frac{BY}{n} + \frac{2ChB}{n^2}\right)\Delta hb. \end{array}\right\} \quad . \quad \text{(c)}$$

Die Formeln (a) von Nro. 7 zeigen, daſs $A$, $B$ und $C$ Functionen von $h$ und $k$ sind, und da die letztere Gröſse selbst eine Function von $h$ ist, so kann man, wenn man sie als eine solche behandelt, $A$, $B$ und $C$ als Functionen von $h$ allein betrachten. Nach der in Nro. 10 gemachten Bemerkung sollen aber den Gliedern der dritten Ordnung noch diejenigen zugesetzt werden, welche das Quadrat von $\Delta\frac{1}{c_1}$ enthalten, und von $b$ unabhängig sind, man muſs daher die Entwickelung von $\Delta A$ bis zu demjenigen Gliede fortsetzen, welches mit

$\Delta h^2$ multiplicirt ist, und woraus jene Glieder entspringen. Dieſs vorausgesetzt, entwickle ich $\Delta A$, $\Delta B$ und $\Delta C$ durch die *Taylor*'sche Reihe, und setze zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dA}{dh}\right) &= \frac{(A)}{n}, \\ \left(\frac{ddA}{2\,dh^2}\right) &= \frac{(A')}{n^2}, \\ \left(\frac{dB}{dh}\right) &= \frac{(B)}{n}, \\ \left(\frac{dC}{dh}\right) &= \frac{(C)}{n}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(d)}$$

dieſs gibt

$$\Delta A = \frac{(A)}{n}\,\Delta h + \frac{(A')}{n^2}\,\Delta h^2,$$

$$\Delta B = \frac{(B)}{n}\,\Delta h,$$

$$\Delta C = \frac{(C)}{n}\,\Delta h.$$

Aus den Formeln (a) von Nro. 7 erhält man

$$(A) = n\left(\frac{dA}{dh}\right) =$$

$$= -\left(\frac{n-1}{2n^2}\right)\left[2k(k-nh)\left(\frac{dk}{dh}\right) + k^2\left(\left(\frac{dk}{dh}\right) - n\right)\right],$$

und da

$$k = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{1}{a} - h,$$

folglich

$$\left(\frac{dk}{dh}\right) = -1$$

ist, so wird der vorhergehende Ausdruck von $(A)$

$$(A) = \left(\frac{n-1}{2n^2}\right) k\,[(n+3)\,k - 2\,n\,h] = -\frac{Dk}{n}$$

$$= \left(\frac{n-1}{2n^2}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{n+3}{a} - \frac{3(n+1)}{c}\right) \quad . \text{(e)}$$

Auf dieselbe Art findet man

$$\left.\begin{aligned}
(A') &= n^2\left(\frac{d\,d\,A}{2\,d\,h^2}\right) = \left(\frac{n-1}{2\,n}\right)[-(2n+3)\,k + n\,h] \\
&= \left(\frac{n-1}{2\,n}\right)\left[-\frac{(2n+3)}{a} + \frac{3\,(n+1)}{c}\right], \\
(B) &= n\left(\frac{d\,B}{d\,h}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)[(n+2)\,k - n\,h] \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)\left[\frac{n+2}{a} - \frac{2\,(n+1)}{c}\right], \\
(C) &= n\left(\frac{d\,C}{d\,h}\right) = \frac{n^2-1}{2}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(f)}$$

Durch die Annahme von $d = 0$ geben die Formeln von Nro. 4:

$$\begin{aligned}
c_i &= g_{i-1}, \\
V_i &= 1, \\
K_i &= K_1, \\
\frac{h_i\,b_i}{n_i} &= \frac{b_i}{n_i\,c_i} = \frac{f_i}{g_i} = \frac{\varphi_1}{v_i}, \\
X_i &= X_1, \\
Y_i &= Y'_1 + K_1\,\varphi_1, \\
Z_i &= \frac{X_1^2 + (Y'_1 + K_1\,\varphi_1)^2}{2\,a_i},
\end{aligned}$$

und da in den Gröſsen der dritten Ordnung alle Glieder vernachlässigt werden, welche mit $d$ multiplicirt sind, eben so wie diejenigen, welche von $b$ oder $f$, nicht aber zugleich von $\Delta\frac{1}{c_1}$ abhängen, so erhält man aus (b), (f) und (g) von Nro. 7, wenn man die vorhergehenden Werthe substituirt:

$$\begin{aligned}
\Delta h_i = \Delta\frac{1}{c_i} &= \Delta\frac{1}{g_{i-1}} \\
&= \frac{1}{v_{i-1}}\left[\Delta\frac{1}{c_1} + \Sigma_1^{(i-1)}(G\,v)_m\right] \\
&= \frac{1}{v_{i-1}}\left[\Delta\frac{1}{c_1} - (X_1^2 + (Y'_1 + K_1\varphi_1)^2)\,\Sigma_1^{(i-1)}(A\,v)_m\right] \\
&= \frac{n_i}{v_i}\left[\Delta\frac{1}{c_1} - L_{i-1}\left(X_1^2 + (Y'_1 + K_1\,\varphi_1)^2\right)\right].
\end{aligned}$$

Durch die Substitution der vorhergehenden Werthe verwandeln sich die drei ersten Glieder von $\Delta G$ in folgende:

$$\left.\begin{aligned}
-(2aZ\Delta A)_i &= -[X_1^2+(Y_1'+K_1\varphi_1)^2]\times \\
&\times\left[\frac{(A)_i}{\nu_i}\Delta\frac{1}{c_1}+\frac{(A')_i}{\nu_i^2}\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right] \\
&+[X_1^2+(Y_1'+K_1\varphi_1)^2]^2\frac{(A)_i L_{i-1}}{\nu_i}, \\
-\left(Y\frac{hb}{n}\Delta B\right)_i &= -(Y_1'+K_1\varphi_1)\frac{\varphi_1(B)_i}{\nu_i^2}\Delta\frac{1}{c_1}, \\
-\left(\frac{h^2b^2}{n^2}\Delta C\right)_i &= -\frac{\varphi_1^2(C)_i}{\nu_i^3}\Delta\frac{1}{c_1}.
\end{aligned}\right\}\quad (g)$$

Die Werthe von $\Delta Y$ und $\Delta Z$ sind durch die Formeln (b), (c) und (d) von Nro. 9 gegeben, worin alle Glieder vernachlässigt werden müssen, welche $\varphi_1$ ohne $K_m$ enthalten, weil diese Glieder von $\frac{f}{g}$ herrühren, wovon $\Delta Y$ ursprünglich eine Function ist, $f$ aber in allen von $\Delta\frac{1}{c_1}$ unabhängigen Gliedern der dritten Ordnung vernachlässigt wird. Substituirt man ferner statt $V_i$ und $K_i$ die vorher gegebenen Werthe, so nehmen die allegirten Formeln die Gestalt an:

$$\Delta Y_i = \Delta(Y_1'+K_1\varphi_1)$$
$$+(Y_1'+K_1\varphi_1)\left[\frac{Z_1}{c_1}-\frac{Z_i}{c_i}+\Sigma_1^{(i-1)}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)kZ\right)_m\right],$$
$$\Delta X_i = \Delta X_1 + X_1\left[\frac{Z_1}{c_1}-\frac{Z_i}{c_i}+\Sigma^{(i-1)}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)kZ\right)_m\right],$$
$$2a_i\Delta Z_i = \left[\left(\frac{X^2+Y^2}{2a}\right)^2+2X\Delta X+2Y\Delta Y\right]_i.$$

Diese Ausdrücke geben, wenn man statt $Z$ seinen Werth substituirt, und zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} J_i &= (k+h)_1\, h_1 - (k+h)_i\, h_i \\ &\quad + \Sigma_1^{(i-1)} \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)(k+h)\, k\right]_m \\ &= \frac{1}{a_1 c_1} - \frac{1}{a_i c_i} + \Sigma_1^{(i-1)} \left[\frac{(n-1)}{n\, a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\right]_m \end{aligned}\right\} \quad \text{(h)}$$

setzt:

$$\left.\begin{aligned} \Delta Y_i &= \Delta(\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1) \\ &\quad + \frac{J_i}{2}(\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)\,[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2], \\ \Delta X_i &= \Delta X_1 + \frac{J_i}{2} X_1 [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2], \\ - A_i\, 2 a_i \Delta Z_i &= - A_i \Delta [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2] \\ &\quad - A_i [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2]^2 \left[J_i + \frac{(k+h)_i^2}{4}\right]. \end{aligned}\right\} \quad \text{(i)}$$

Der vorhergehende Werth von $\Delta Y_i$ zeigt, dafs das Glied $-B\frac{hb}{n}\Delta Y$, welches in $\Delta G$ vorkommt, von $\Delta\frac{1}{c_1}$ unabhängig ist, und da es $b$ als Factor enthält, so kann es nach den angenommenen Grundsätzen vernachlässigt werden.

Die Formeln (g) von Nro. 2 geben

$$\Delta h_i b_i = \Delta \frac{b_i}{c_i} = \Delta \frac{f_{i-1}}{g_{i-1}}$$

$$= Y_{i-1} \Delta \frac{1}{g_{i-1}} - \left(Y \Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right)_{i-1}.$$

Durch die Voraussetzung von $d = 0$ erhält man aber aus den Formeln (f) von Nro. 7, und (e) von Nro. 8:

$$Y_{i-1} \Delta \frac{1}{g_{i-1}} = \frac{(\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)}{\nu_{i-1}} \left[\Delta \frac{1}{c_1} + \Sigma_1^{(i-1)} (G\nu)_m\right],$$

$$- \left(Y \Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right)_{i-1} =$$

$$= \frac{-(\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)}{\nu_{i-1}} \left[\Delta \frac{1}{c_1} + \Sigma_1^{(i-1)} (G\nu)_m\right]$$

$$+ \frac{1}{\nu_{i-1}} \left[\Delta \varphi_1 - \Sigma_{1\ m}^{(i-1)} \left(\frac{nG}{k}\right)_m \varphi_1\right],$$

und folglich

$$\Delta h_i b_i = \Delta \frac{f_{i-1}}{g_{i-1}} = \frac{1}{v_{i-1}} \left[ \Delta \varphi_1 - \sum_{m}^{(i-1)}{}_1 \left(\frac{nG}{k}\right)_m \varphi_1 \right].$$

Das mit $\Delta hb$ multiplicirte Glied von $\Delta G$ kann daher ebenfalls vernachlässigt werden.

Ich gehe nun zur Entwickelung von $G'$, welches durch den Ausdruck (a) gegeben ist. Da $\mathfrak{b} = o$ angenommen wird, so erhält man aus Nro. 2:

$$\frac{1}{g} = (k + h) - \frac{k}{n},$$

$$Z = (k + h)\, a Z,$$

$$\mathfrak{l} = \left(\frac{k}{n}\right)^2 2aZ - \frac{(k+h)^2 k^2 a^2 Z^2}{n^2},$$

$$\mathfrak{m} = - kh \,.\, 2aZ,$$

$$t = - 2aZ \left[\frac{(k+h)^2}{2} + kh\right],$$

$$u = - 2aZ \left[kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$w = - 2aZ \left[(k + h)^2 + kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$t' = 2a^2 Z^2 (k + h)^2 kh,$$

$$u' = a^2 Z^2 (k + h)^2 \left(\frac{k}{n}\right)^2,$$

$$w' = a^2 Z^2 (k + h)^2 \left[(k + h)^2 + 4kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$(k + h)(t - w) = aZ(k + h)\left[(k + h)^2 + 2\left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$-\frac{k}{n}\left(\frac{u}{2} - w\right) = - aZ\left(\frac{k}{n}\right)\left[2(k+h)^2 + kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$-\left(w + \frac{2Z}{g}\right) = 2aZ\left[kh + (k + h)\left(\frac{k}{n}\right) + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right].$$

Hieraus folgen die Werthe der verschiedenen Glieder, welche in dem allegirten Ausdrucke von $G'$ vorkommen, nämlich

$$(k + h)(t' - w') =$$

$$= - a^2 Z^2 (k + h)^3 \left[(k + h)^2 + 2kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$-\frac{k}{n}\left(\frac{u'}{2}-w'\right)=$$

$$=a^2 Z^2 (k+h)^2\left(\frac{k}{n}\right)\left[(k+h)^2+4kh+\tfrac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right],$$

$$\frac{k\,u^2}{8n}=a^2 Z^2\left(\frac{k}{n}\right)\left[\frac{k^2h^2}{2}+kh\left(\frac{k}{n}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^4\right],$$

$$-\left(w+\frac{2Z}{g}\right)(k+h)(t-w)=$$

$$=a^2 Z^2 (k+h)\left\{\begin{array}{l} 2kh(k+h)^2+2(k+h)^3\left(\frac{k}{n}\right) \\ +\left[2(k+h)^2+4kh\right]\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ +4(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^3+4\left(\frac{k}{n}\right)^4, \end{array}\right.$$

$$\left(w+\frac{2Z}{g}\right)\frac{k}{n}\left(\frac{u}{2}-w\right)=$$

$$=-a^2 Z^2\left(\frac{k}{n}\right)\left\{\begin{array}{l} 4kh(k+h)^2+2k^2h^2 \\ +\left[4(k+h)^3+2kh(k+h)\right]\left(\frac{k}{n}\right) \\ +\left[4(k+h)^2+4kh\right]\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ +2(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^3+2\left(\frac{k}{n}\right)^4, \end{array}\right.$$

$$\frac{Z^2}{g^2}=a^2 Z^2 (k+h)^2\left[(k+h)^3-3(k+h)^2\left(\frac{k}{n}\right)\right.$$
$$\left.+3(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{k}{n}\right)^3\right].$$

Durch die Vereinigung dieser Glieder erhält man den folgenden Werth von $G'$

$$G'=a^2 Z^2\left\{\begin{array}{l} -\tfrac{3}{2}k^2h^2\left(\frac{k}{n}\right)+2kh(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ -\tfrac{1}{2}\left[(k+h)^2+6kh\right]\left(\frac{k}{n}\right)^3 \\ +2(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^4-\tfrac{3}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^5. \end{array}\right.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$F = \frac{k^2}{8n^2}\left\{\begin{array}{l} -(k+h)^2\,[k-(n-1)\,h] \\ +\frac{k}{n^3}(k+n^2 h)^2 + \frac{2(n-1)^2}{n^3}\,k\,(k-nh)^2 \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{8n^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)^2 \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{n}{c}\right) \\ +\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{n^2-1}{c}\right)^2 \\ +\frac{2(n-1)^2}{n^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\times \\ \qquad \times\left(\frac{1}{a}-\frac{(n+1)}{c}\right)^2, \end{array}\right. \qquad \text{(k)}$$

und bemerkt, daſs

$$\left(\frac{n-1}{2\,n^3}\right) k^2\,(k-n\,h) = A,$$

$$a_i^2\,Z_i^2 = \frac{[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1)^2]^2}{4}$$

ist, so kann der vorhergehende Ausdruck von $G'$, auf die $i^{te}$ Fläche bezogen, unter die Gestalt gebracht werden:

$$G_i' = [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1)^2]^2\left[-F + \frac{A\,(k+h)^2}{4}\right]_i.$$

Vereinigt man daher diesen Werth mit den in (g) und (i) gefundenen Gliedern von $\Delta G$, setzt

$$\left.\begin{array}{l} (L)^{(i)} = (A)_i, \\ (M)^{(i)} = 2\,(A)_i\,K_1 + \frac{(B)_i}{\nu_i}, \\ (N)^{(i)} = (A)_i\,K_1^2 + \frac{(B)_i\,K_1}{\nu_i} + \frac{(C)_i}{\nu_i^2}, \\ (L')^{(i)} = \frac{(A')_i}{\nu_i}, \\ (M')^{(i)} = \frac{2\,(A')_i\,K_1}{\nu_i}, \\ (N')^{(i)} = \frac{(A')_i\,K_1^2}{\nu_i}, \\ Q^{(i)} = F_i\,\nu_i + A_i\,\nu_i\,J_i - (A)_i\,L_{i-1}, \end{array}\right\} \quad .\ .\ \text{(l)}$$

und multiplicirt alle Glieder durch $V_i^2$, welches durch die Voraussetzung von $d = o$ der Einheit gleich wird, so erhält man

$$\Delta G_i + G_i' = -\frac{V_i^2}{v_i} \cdot \left\{ \begin{array}{l} A_i\, v_i\, \Delta \left[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2\right] \\ + \left[(L)^{(i)} \Delta \frac{1}{c_1} \right. \\ \qquad \left. + (L')^{(i)} \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2\right] (X_1^2 + \acute{Y}_1^2) \\ + \left[(M)^{(i)} \Delta \frac{1}{c_1} + (M')^{(i)} \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2\right] \acute{Y}_1 \varphi_1 \\ + \left[(N)^{(i)} \Delta \frac{1}{c_1} + (N')^{(i)} \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2\right] \varphi_1^2 \\ + Q^{(i)} \left[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2\right]^2. \end{array} \right\} \quad (m)$$

Da auf diese Art der Werth von $\mathfrak{G}$ vermittelst der Ausdrücke (b) und (m) gefunden ist, so kann man zur Entwickelung der Gleichung (c) von Nro. 2, nämlich

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h} - \frac{\mathfrak{k}}{n} + \mathfrak{G}$$

übergehen. Substituirt man hierin statt $\frac{1}{\mathfrak{g}}$, $(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})$; und $\mathfrak{G}$ ihre Werthe

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{1}{g} + \Delta \frac{1}{g} + \Delta^2 \frac{1}{g},$$

$$\mathfrak{k} + \mathfrak{h} = \frac{1}{a} = k + h,$$

$$\mathfrak{k} = \frac{1}{a} - \frac{1}{\mathfrak{c}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} - \Delta \frac{1}{c} - \Delta^2 \frac{1}{c},$$

$$\mathfrak{G} = G + \Delta G + G',$$

so gibt die Vergleichung der zur dritten Ordnung gehörigen Glieder

$$\Delta^2 \frac{1}{g} = \frac{1}{n} \Delta^2 \frac{1}{c} + \Delta G + G' \quad . \quad . \quad . \quad (n)$$

Man hat eben so

$$\Delta^2 \frac{1}{g_\prime} = \frac{1}{n_\prime} \Delta^2 \frac{1}{c_\prime} + \Delta G_\prime + G_\prime' \quad . \quad . \quad (o)$$

Die zweite Gleichung (g) von Nro. 2 kann unter die Gestalt gebracht werden:

$$\frac{1}{c_{,}} = \frac{1}{g}\left(1 + \frac{d}{g}\right)^{-1}$$

oder

$$\frac{1}{c_{,}} + \Delta\frac{1}{c_{,}} + \Delta^2\frac{1}{c_{,}} =$$

$$= \left(\frac{1}{g} + \Delta\frac{1}{g} + \Delta^2\frac{1}{g}\right)\left(1 + \frac{d}{g} + d\,\Delta\frac{1}{g} + d\,\Delta^2\frac{1}{g}\right)^{-1}.$$

Entwickelt man den zweiten Theil dieser Gleichung, bemerkt, daſs

$$c_{,} = g + d$$

ist, und vergleicht die Gröſsen der zweiten und dritten Ordnung abgesondert, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \Delta\frac{1}{c_{,}} &= \frac{g^2}{c_{,}^2}\,\Delta\frac{1}{g}, \\ \Delta^2\frac{1}{c_{,}} &= \frac{g^2}{c_{,}^2}\,\Delta^2\frac{1}{g} - \frac{g^3}{c_{,}^3}\,d\left(\Delta\frac{1}{g}\right)^2. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (p)$$

Hierdurch verwandelt sich die Gleichung (o) in folgende:

$$\Delta^2\frac{1}{g_{,}} = \frac{g^2}{n_{,}\,c_{,}^2}\,\Delta^2\frac{1}{g} + \Delta G_{,} + G'_{,} - \frac{g^3 d}{n_{,}\,c_{,}^3}\left(\Delta\frac{1}{g}\right)^2.$$

Sie hat dieselbe Form wie die Gleichung (e) von Nro. 7, die daselbst gebrauchte Analyse gibt daher gleichfalls das Integral derselben, welches wird:

$$\Delta^2\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i}\left\{\begin{aligned} &\Delta^2\frac{1}{c_1} + \Sigma_1^i\,\frac{v_m}{V_m^2}\,(\Delta G + G')_m \\ &- \Sigma_{m\,1}^{\;i}\,\frac{v_m\,g_{m-1}^3\,d_{m-1}}{V_m^2\,n_m\,c_m^3}\left(\Delta\frac{1}{g}\right)_{m-1}^2. \end{aligned}\right\} \quad (q)$$

Die zweite in diesem Ausdrucke enthaltene Summe besteht aus verschiedenen Gliedern, von welchen einige dem Objective, andere den folgenden Flächen angehören. Nach den angenommenen Grundsätzen werden aber die Glieder der dritten Ordnung vernachlässigt,

welche von dem Objective herrühren und mit $d$ multiplicirt sind, in Bezug auf die folgenden Flächen dagegen ist $\Delta \frac{1}{g}$ auf eine Gröfse der dritten Ordnung reducirt, wovon das Quadrat vernachlässigt wird, man kann daher die ganze Summe weglassen. Hierdurch wird das vorhergehende Integral

$$\Delta^2 \frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i} \left[ \Delta^2 \frac{1}{c_1} + \Sigma_1^i \frac{v_m}{V_m^2} (\Delta G + G')_m \right],$$

und es bleibt nur noch übrig, statt $(\Delta G + G')_m$ seinen Werth (m) zu substituiren.

Bemerkt man, dafs in Bezug auf das Objectiv

$$V_i = 1,$$

mithin

$$\Sigma_1^i A_m V_m = L_i$$

ist, so erhält man durch die in Nro. 7 eingeführte Bezeichnung:

$$\Delta^2 \frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i} \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 \frac{1}{c_1} - L_i \Delta [X_1^2 + (Y_1' + K_1 \varphi_1)^2] \\ - \Big[ (L)_i \Delta \frac{1}{c_1} \\ \qquad + (L')_i \left( \Delta \frac{1}{c_1} \right)^2 \Big] (X_1^2 + Y_1'^2) \\ - \left[ (M)_i \Delta \frac{1}{c_1} + (M')_i \left( \Delta \frac{1}{c_1} \right)^2 \right] Y_1' \varphi_1 \\ - \left[ (N)_i \Delta \frac{1}{c_1} + (N')_i \left( \Delta \frac{1}{c_1} \right)^2 \right] \varphi_1^2 \\ - Q^{(i)} [X_1^2 + (Y_1' + K_1 \varphi_1)^2]^2 . \end{array} \right\} \quad \text{(r)}$$

Da alle Glieder der dritten Ordnung vernachlässigt werden, welche von den auf das Objectiv folgenden Flächen herrühren, so mufs man die Gröfsen $(L)^{(m)}$ u. s. w., welche sich auf die letztern Flächen beziehen, $= 0$ setzen; oder mit andern Worten: die in den Coefficienten enthaltenen und durch das Zeichen $\Sigma$ angedeuteten Summen nur auf die Flächen des Objectivs ausdehnen.

12) Um den Werth von $\left(Y \Delta^2 \frac{1}{g} - \Delta^2 \frac{f}{g}\right)$ zu finden, entwickle ich, wie in Nro. 8, zuerst die Gleichung (h) von Nro. 2, nämlich

$$\frac{\mathfrak{f}_{,}}{\mathfrak{g}_{,}} = \frac{\mathfrak{g}}{n_{,}\mathfrak{c}_{,}} \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} - \frac{\mathfrak{g}}{n_{,}\mathfrak{c}_{,}} \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} \frac{n_{,}\mathfrak{G}_{,}}{\mathfrak{k}_{,}}.$$

Da die Entwickelung bis zu den Gliedern der dritten Ordnung fortgesetzt werden soll, so ist

$$\frac{\mathfrak{f}_{,}}{\mathfrak{g}_{,}} = \frac{f_{,}}{g_{,}} + \Delta \frac{f_{,}}{g_{,}} + \Delta^2 \frac{f_{,}}{g_{,}},$$

$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} = \frac{f}{g} + \Delta \frac{f}{g} + \Delta^2 \frac{f}{g},$$

$$\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{c}_{,}} = 1 - \frac{d}{\mathfrak{c}_{,}} = \frac{g}{c_{,}} - d\Delta \frac{1}{c_{,}} - d\Delta^2 \frac{1}{c_{,}},$$

$$\mathfrak{G}_{,} = G_{,} + \Delta G_{,} + G'_{,},$$

$$\frac{\mathfrak{g}}{n_{,}\mathfrak{c}_{,}} \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} \frac{n_{,}\mathfrak{G}_{,}}{\mathfrak{k}_{,}} = \frac{g}{n_{,}c_{,}} \frac{f}{g} \frac{n_{,}G_{,}}{k_{,}}$$
$$+ \frac{g}{n_{,}c_{,}} \frac{f}{g} \Delta\left(\frac{n_{,}G_{,}}{k_{,}}\right) + \frac{G_{,}}{k_{,}} \Delta\left(\frac{g}{c_{,}} \frac{f}{g}\right) + \frac{g}{c_{,}} \frac{f}{g} \frac{G'_{,}}{k_{,}}.$$

Substituirt man diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung, so erhält man durch die Vergleichung der zur dritten Ordnung gehörigen Gröfsen:

$$-\Delta^2 \frac{f_{,}}{g_{,}} = -\frac{g}{n_{,}c_{,}} \Delta^2 \frac{f}{g} + \frac{d}{n_{,}} \Delta \frac{1}{c_{,}} \Delta \frac{f}{g}$$
$$+ \frac{d}{n_{,}} \frac{f}{g} \Delta^2 \frac{1}{c_{,}} + \frac{g}{n_{,}c_{,}} \frac{f}{g} \Delta\left(\frac{n_{,}G_{,}}{k_{,}}\right)$$
$$+ \frac{G_{,}}{k_{,}} \Delta\left(\frac{g}{c_{,}} \frac{f}{g}\right) + \frac{g}{c_{,}} \frac{f}{g} \frac{G'_{,}}{k_{,}} \quad \ldots \quad (a)$$

Die Gleichung (o) von Nro. 11, multiplicirt mit $Y_{,}$, gibt

$$Y_{,}\Delta^2 \frac{1}{g_{,}} = \frac{Y_{,}}{n_{,}} \Delta^2 \frac{1}{c_{,}} + Y_{,}(\Delta G_{,} + G'_{,});$$

folglich, wenn man in dem von $\Delta^2 \frac{1}{c_{,}}$ abhängigen Gliede statt $Y_{,}$ seinen Werth aus (a) von Nro. 4, nämlich

$$Y_{,} = \frac{c_{,}}{g} Y - \frac{fd}{g}$$

substituirt:

$$Y_{,} \Delta^2 \frac{1}{g_{,}} = \frac{c_{,}}{n_{,} g} Y \Delta^2 \frac{1}{c_{,}} - \frac{d}{n_{,}} \frac{f}{g} \Delta^2 \frac{1}{c_{,}} + Y_{,} (\Delta G_{,} + G'_{,}).$$

Diese Gleichung, zu der vorhergehenden (a) addirt, gibt

$$\left(Y_{,} \Delta^2 \frac{1}{g_{,}} - \Delta^2 \frac{f_{,}}{g_{,}}\right) = \frac{c_{,}}{n_{,} g} Y \Delta^2 \frac{1}{c_{,}} - \frac{g}{n_{,} c_{,}} \Delta^2 \frac{f}{g}$$
$$+ Y_{,} (\Delta G_{,} + G'_{,}) + \frac{g}{n_{,} c_{,}} \frac{f}{g} \Delta \left(\frac{n_{,} g_{,}}{k_{,}}\right)$$
$$+ \frac{G_{,}}{k_{,}} \Delta \left(\frac{g}{c_{,}} \frac{f}{g}\right) + \frac{g}{c_{,}} \frac{f}{g} \frac{G'_{,}}{k_{,}} + \frac{d}{n_{,}} \Delta \frac{1}{c_{,}} \Delta \frac{f}{g}.$$

Durch Substitution der in (p) von Nro. 11 gefundenen Werthe von $\Delta \frac{1}{c_{,}}$ und $\Delta^2 \frac{1}{c_{,}}$ erhält man hieraus die endliche Differenzengleichung

$$\left(Y_{,} \Delta^2 \frac{1}{g_{,}} - \Delta^2 \frac{f_{,}}{g_{,}}\right) = \frac{g}{n_{,} c_{,}} \left(Y \Delta^2 \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right)$$
$$+ Y_{,} (\Delta G_{,} + G'_{,}) + \frac{g}{n_{,} c_{,}} \frac{f}{g} \Delta \left(\frac{n_{,} G_{,}}{k_{,}}\right)$$
$$+ \frac{G_{,}}{k_{,}} \Delta \left(\frac{g}{c_{,}} \frac{f}{g}\right) + \frac{g}{c_{,}} \frac{f}{g} \frac{G'_{,}}{k_{,}}$$
$$- \frac{d g^2}{n_{,} c_{,}^2} \Delta \frac{1}{g} \left(Y \Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right).$$

Sie hat dieselbe Form wie die Gleichung (c) von Nro. 8, die daselbst gebrauchte Analyse gibt daher ihr Integral

$$\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)_i=$$

$$=\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}(Y_1'+K_1\varphi_1)\,\Delta^2\frac{1}{c_1}-\Delta^2\varphi_1\\[1ex] +\sum_m^i{}_1\frac{v_m}{V_m}\left\{\begin{array}{l}Y_m(\Delta G+G')_m\\ \quad+\frac{g_{m-1}}{n_m c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\Delta\left(\frac{nG}{k}\right)_m\\ \quad+\frac{G_m}{k_m}\Delta\left(\frac{g_{m-1}}{c_m}\cdot\frac{f_{m-1}}{g_{m-1}}\right)\\ \quad+\frac{g_{m-1}}{c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\frac{G'_m}{k_m}\\ \quad-\frac{d_{m-1}}{n_m}\frac{g^2_{m-1}}{c^2_m}\Delta\frac{1}{g_{m-1}}\times\\ \qquad\times\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_{m-1}\end{array}\right.\end{array}\right\}\quad\text{(b)}$$

Eben so wie in Nro. 11 kann man das letzte Glied dieses Integrals weglassen, weil in Bezug auf das Objectiv alle mit $d$ multiplicirten Glieder vernachlässigt werden, in Bezug auf die folgenden Flächen dagegen $\Delta\frac{1}{g}$ und $\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)$ auf Gröſsen der dritten Ordnung reducirt sind. Ferner werden in den Gröſsen dieser Ordnung alle mit $f$ multiplicirten, von $\Delta\frac{1}{c_1}$ aber unabhängigen Glieder vernachlässigt, wornach auch die beiden vorletzten Glieder wegfallen. Hierdurch reducirt sich das vorhergehende Integral auf

$$\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)_i=$$

$$=\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}(Y_1'+K_1\varphi_1)\,\Delta^2\frac{1}{c_1}-\Delta^2\varphi_1\\ +\sum_m^i{}_1\frac{v_m}{V_m}\left\{\begin{array}{l}Y_m(\Delta G+G')_m\\ +\frac{g_{m-1}}{n_m c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\Delta\left(\frac{nG}{k}\right)_m.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Die Formeln von Nro. 4 geben aber

$$Y_m = \frac{1}{V_m}(Y_1 + K_m \varphi_1),$$

$$\frac{g_{m-1}}{n_m c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1} = \frac{V_m \varphi_1}{v_m},$$

und in der ersten dieser Formeln kann man $K_m$ mit $K_1$ verwechseln, weil sich $(\Delta G + G')$ blofs auf das Objectiv bezieht, man hat folglich

$$\left.\begin{array}{l} \left(Y\Delta^2 \frac{1}{g} - \Delta^2 \frac{f}{g}\right)_i = \\ = \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l} (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\,\Delta^2 \frac{1}{c_1} - \Delta^2 \varphi_1 \\ + \Sigma_1 \left\{\begin{array}{l} (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\,\frac{v_m}{V_m^2}(\Delta G + G')_m \\ + \varphi_1 \Delta\left(\frac{nG}{k}\right)_m . \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \text{(c)}$$

Der Ausdruck (m) von Nro. 11 gibt aber

$$\left.\begin{array}{l} (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\,\frac{v_m}{V_m^2}(\Delta G + G')_m = \\ = -\left\{\begin{array}{l} A_m v_m (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\,\Delta\left[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)^2\right] \\ + \left[(L)^{(m)}\,\Delta\frac{1}{c_1} \right. \\ \qquad \left. + (L')^{(m)}\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right](X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\ + \left[(L)^{(m)}\,\Delta\frac{1}{c_1} \right. \\ \qquad \left. + (L')^{(m)}\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right] K_1 (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\varphi_1 \\ + \left[(M)^{(m)}\,\Delta\frac{1}{c_1} + (M')^{(m)}\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]\acute{Y}_1^2\,\varphi_1 \\ + \left[((M)^{(m)} K_1 + (N)^{(m)})\,\Delta\frac{1}{c_1} \right. \\ \left. + ((M')^{(m)} K_1 + (N')^{(m)})\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]\acute{Y}_1\,\varphi_1 \\ + \left[(N)^{(m)}\,\Delta\frac{1}{c_1} + (N')^{(m)}\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right] K_1\,\varphi_1^3 \\ + Q^{(m)}(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\left[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)^2\right]^2 \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \text{(d)}$$

Gebraucht man ferner die Bezeichnungen (f) von Nro. 8, so erhält man aus (b) von Nro. 7:

$$\frac{nG}{k} = -\left[BaZ + (D - C)\,Y\frac{hb}{n} + E\left(\frac{hb}{n}\right)^2\right].$$

Da $\Delta\left(\frac{nG}{k}\right)$ mit $\varphi_1$ multiplicirt ist, so gibt die vorhergehende Formel nach den in Nro. 11 entwickelten Grundsätzen:

$$\Delta\left(\frac{nG}{k}\right) = -\left\{\begin{array}{l} aZ\Delta B + Y\frac{hb}{n}\Delta(D - C) \\ + \left(\frac{hb}{n}\right)^2 \Delta E + Ba\Delta Z. \end{array}\right.$$

Man hat nach derselben Nummer, wenn man bemerkt, dafs die von $\Delta\frac{1}{c_1}$ unabhängigen Glieder vernachlässigt werden:

$$\Delta B_m = \frac{(B)_m}{v_m}\,\Delta\frac{1}{c_1},$$

$$\Delta C_m = \frac{(C)_m}{v_m}\,\Delta\frac{1}{c_1},$$

$$\Delta Z_m = 0,$$

$$\left(\frac{hb}{n}\right)_m = \frac{\varphi_1}{v_m},$$

$$Y_m = Y'_1 + K_1\varphi_1,$$

$$a_m Z_m = \frac{X_1^2 + (Y'_1 + K_1\varphi_1)^2}{2},$$

Aufserdem geben die Formeln von Nro. 8

$$\left.\begin{array}{l} \Delta D_m = \left(\frac{dD}{dh}\right)_m \Delta h_m = \frac{3}{2}\left(\frac{n^2 - 1}{n}\right)_m \Delta h_m \\ \quad = \frac{3(C)_m}{n_m}\Delta h_m = 3\Delta C_m, \\ \Delta E_m = \left(\frac{dE}{dh}\right)_m \Delta h_m = 0. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (e)$$

Hierdurch wird

$$\varphi_1 \Delta \left(\frac{n\,G}{k}\right)_m = -\Delta \frac{1}{c_1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{(B)_m}{2\,\nu_m} (X_1^2 + Y_1'^2)\,\varphi_1 \\ + \left[\frac{(B)_m K_1}{\nu_m} + \frac{2\,(C)_m}{\nu_m^2}\right] Y_1' \varphi_1^2 \\ + \left[\frac{(B)_m K_1^2}{2\,\nu_m} + \frac{2\,(C)_m K_1}{\nu_m^2}\right] \varphi_1^3. \end{array} \right\} \quad \text{(f)}$$

Addirt man daher die beiden Ausdrücke (d) und (f), bemerkt, daſs nach den Formeln (l) von Nro. 11

$$\frac{(B)_m}{2\,\nu_m} + (L)^{(m)} K_1 = \frac{(M)^{(m)}}{2},$$

$$\frac{(B)_m K_1}{\nu_m} + \frac{2\,(C)_m}{\nu_m^2} + (M)^{(m)} K_1 + (N)^{(m)} = 3\,(N)^{(m)},$$

$$(L')^{(m)} K_1 = \frac{(M')^{(m)}}{2},$$

$$(M')^{(m)} K_1 + (N')^{(m)} = 3\,(N')^{(m)}$$

ist, und setzt

$$\left. \begin{array}{l} (P)^{(m)} = (A)_m K_1^3 + \frac{3\,(B)_m K_1^2}{2\,\nu_m} + \frac{3\,(C)_m K_1}{\nu_m^2}, \\ (P')^{(m)} = (N')^{(m)} K_1 = \frac{(A')_m K_1^3}{\nu_m}, \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad \text{(g)}$$

so erhält man

$$(Y_1' + K_1 \varphi_1) \frac{\nu_m}{V_m^2} (\Delta G + G')_m + \varphi_1 \Delta \left(\frac{n\,G}{k}\right)_m =$$

$$= - \left\{ \begin{array}{l} A_m \nu_m (Y_1' + K_1 \varphi_1)\,\Delta\,[X_1^2 + (Y_1' + K_1 \varphi_1)^2] \\ + \left[(L)^{(m)} \Delta \frac{1}{c_1} + (L')^{(m)} \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2\right] (X_1^2 + Y_1'^2)\,Y_1' \\ + \left[(M)^{(m)} \Delta \frac{1}{c_1} + (M')^{(m)} \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2\right] \left(\frac{X_1^2 + 3\,Y_1'^2}{2}\right) \varphi_1 \\ + 3 \left[(N)^{(m)} \Delta \frac{1}{c_1} + (N')^{(m)} \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2\right] Y_1' \varphi_1^2 \\ + \left[(P)^{(m)} \Delta \frac{1}{c_1} + (P')^{(m)} \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2\right] \varphi_1^3 \\ + Q^{(m)} (Y_1' + K_1 \varphi_1)\,[X_1^2 + (Y_1' + K_1 \varphi_1)^2]^2. \end{array} \right.$$

Durch Substitution dieses Werthes wird das Integral (c) nach der in Nro. 7 eingeführten Bezeichnung

$$\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)_i=$$

$$=\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}(Y_1'+K_1\varphi_1)\Delta^2\frac{1}{c_1}-\Delta^2\varphi_1\\ -L_i(Y_1'+K_1\varphi_1)\Delta[X_1^2+(Y_1'+K_1\varphi_1)^2]\\ -\left[(L)_i\Delta\frac{1}{c_1}+(L')_i\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right](X_1^2+Y_1'^2)Y_1'\\ -\left[(M)_i\Delta\frac{1}{c_1}+(M')_i\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]\left(\frac{X_1^2+3Y_1'^2}{2}\right)\varphi_1\\ -3\left[(N)_i\Delta\frac{1}{c_1}+(N')_i\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]Y_1'\varphi_1^2\\ -\left[(P)_i\Delta\frac{1}{c_1}+(P')_i\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right]\varphi_1^3\\ -Q_i(Y_1'+K_1\varphi_1)[X_1^2+(Y_1'+K_1\varphi_1)^2]^2,\end{array}\right\} \quad \text{(h)}$$

worin die in den Coefficienten enthaltenen und durch das Zeichen $\Sigma$ angedeuteten Summen, so wie es bereits am Ende von Nro. 11 bemerkt worden ist, nur auf die Flächen des Objectivs ausgedehnt werden dürfen. Die Ausdrücke (r) von Nro. 11 und (h) der gegenwärtigen Nummer enthalten die Werthe von allen Gröſsen der dritten Ordnung, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen und in den Gleichungen (d) von Nro. 5 vorkommen, und da die Gröſsen der ersten und zweiten Ordnung in dem Vorhergehenden vollständig entwickelt worden sind, so ist nunmehr Alles gegeben, was zur Berechnung der Lage der gebrochenen Strahlen erforderlich ist. Hierbei ist jedoch keine Rücksicht auf die Farbenzerstreuung genommen worden, es bleibt daher noch übrig, die Abweichungen zu entwickeln, welche durch letztere hervorgebracht werden.

(Die Fortsetzung folgt.)

# VI.

# Über das beim Anlegen Artesischer Brunnen in und um Wien übliche Verfahren;

von

*C a m i l l a.*

Die Gegend um Wien ist so reich an Artesischen Brunnen, daſs in dieser Beziehung wenige andere einen Vergleich mit ihr aushalten, auch existiren viele derselben schon über ein Jahrhundert, und sind von da aus erst den Franzosen bekannt geworden, denen Einige, verführt durch den französischen Namen dieser Brunnen, sogar das Verdienst ihrer Erfindung zuschreiben. Ich besitze in meinem Hause und Garten zu Allmannsdorf nächst Wien fünf solche Brunnen von ausgezeichneter Ergiebigkeit (siehe den lehrreichen Aufsatz über Artesische Brunnen vom Freiherrn von *Jacquin*, Bd. VIII., S. 273 dieser Zeitschrift), deren ich mehrere selbst anlegen lieſs, und habe demnach hinreichende Erfahrung gemacht über den Werth des Verfahrens, das man in unserer Gegend anzuwenden pflegt. Es ist dieses Verfahren viel einfacher als das in Frankreich und England übliche, und führt mit weniger Unkosten zum Ziele; daher es auch wohl der Mühe lohnt, es hier im Kurzen aus einander zu setzen.

Wenn man über die Stelle einig geworden ist, wo der Artesische Brunnen angelegt werden soll, so gräbt man daselbst eine Grube von 5 Wiener Fuſs im Durchmesser 2 bis 3 Klafter tief, nur wenn man auf Sand oder Schotter kommt, muſs man tiefer graben. Man geht in der Regel so tief, bis man auf fetten Thon kommt. Die so erhaltene Grube heiſst die *Brunngrube*. Hat man diese

fertig, so errichtet man über sie ein pyramidenförmiges *Gerüste* (Fig. 31) aus drei Balken, deren jeder 6 W. Klafter lang ist, indem man dieselben oben mittelst eiserner Klammern mit einander verbindet. An der obersten Stelle dieses Gerüstes wird eine Kette mit Klammern angebracht und an diese die Rolle gehängt, die zum Aufzug gebraucht wird. Die Spitze dieses Gerüstes darf nicht gerade über der Mitte der Brunngrube stehen, sondern muſs etwas an der Seite sich befinden, damit die Stangen, welche beim Bohren gebraucht werden und häufig länger sind als die Höhe des Gerüstes beträgt, neben der Pyramidenspitze vorbei aus dem Bohrloch gehoben werden können. Ein eiserner am Gerüste befestigter Ring dient diesen Stangen zum Führer, und darf darum nicht fehlen.

Ist dieses Gerüste gehörig aufgestellt, so nimmt man eine *Röhre* von Lerchbaum- oder Föhrenholz mit einer 4 W. Zoll im Durchmesser haltenden Öffnung, spitzt sie an einem Ende pallisadenförmig zu, und versieht sie am anderen mit einem 2 Z. breiten, $^1/_2$ Z. dicken Eisenring. Diese Röhre wird mit dem zugespitzten Ende an die Stelle gebracht, wo das Bohrloch gemacht werden soll, und ihr eine verticale Stellung gegeben. In die Höhlung dieser Röhre kommt nun die sogenannte *Brunnstange* mit dem *Tegelbohrer*, so daſs letzterer auf dem Boden fest aufsitzt. Die Brunnstange *a* (Fig. 32) ist eine eiserne, 3 Klafter lange Stange, die an mehreren Stellen runde Löcher, in der Nähe eines jeden Endes aber ein viereckiges Loch, und nicht weit davon eine Hervorragung, Warze genannt, hat. Die viereckigen Löcher und die Warze dienen dazu, mit einer solchen Stange einerseits den Bohrer, andererseits eine zweite ähnliche Stange verbinden zu können. Die Verbindung geschieht so, daſs man die Warze des Bohrers oder der zweiten

Stange in das Loch der ersten eingreifen läfst, und über beide Stücke einen Ring schiebt, und ihn fest anschlägt.

Der Tegelbohrer hat die Gestalt b, ist 3 1/2 F. lang, und am Stiele wie die Brunnstange mit einem Loche und einer Warze versehen. Ist die Brunnstange sammt dem Tegelbohrer am genannten Platze, so wird der *Schlegel*, in der Brunnsprache der *Fuchs* genannt, an das Seil gehängt, das über die Rolle des Gerüstes geht. Dieser Schlegel besteht aus einem 2 1/2 W. F. langem Stücke einer Brunnröhre, ist mit 4 — 6 eisernen Ringen versehen, und überdiefs nach oben mit einer Vorrichtung zum Einhängen des Zugseiles, das über die Rolle geht; manchmal windet man am unteren Theile desselben auch noch einen Strickreif um, und läfst von demselben vier dünnere Stricke herabgehen, an denen Arbeiter beim Gebrauch des Schlegels ziehen können, damit derselbe nicht blofs durch sein Gewicht, sondern überdiefs noch durch die Zugkraft der Arbeiter wirke.

Ist dieser Schlegel an seinem Platze oberhalb der Röhre so angebracht, dafs auch die Brunnstange durch seine Öffnung geht und ihm gleichsam zum Führer dient, so zieht man ihn auf, läfst ihn anfangs langsam, dann aber immer schneller auf die Brunnröhre herabfallen, unterstützt ihn, wenn es Noth thut, auch noch durch Zug, und fährt so fort, bis die Röhre fest steckt. Findet man, dafs dieses selbst dann noch nicht der Fall ist, wenn die Röhre schon fast ganz in die Erde eingetrieben worden ist, so setzt man auf sie eine zweite Röhre auf, verbindet aber beide mit einander durch eine eiserne Büchse *c* von 6 Z. Durchmesser und 4 Z. Höhe, um deren Mitte ein runder Eisenstab wie eine Wulst herum läuft, indem man diese Büchse zuerst in die bereits eingeschlagene Röhre bis auf die Wulst hineintreibt, dann die zweite gehörig aufsetzt, damit ihre Bohrungen

zu einander passen, und sie mittelst des Schlegels mit der ersten verbindet.

Nach allen diesen Vorbereitungen schreitet man zum Bohren. Man steckt zu diesem Ende durch ein rundes Loch der aus der Brunnröhre hervorragenden Bohrstange einen 3 F. langen *Eisenstab d*, und dreht mittelst desselben den Bohrer, bis er feststeht, welches dann erfolgt, wenn er voll ist, worauf man ihn herauszieht und ausleert. Sollte eine Hebelstange zum Drehen des Bohrers nicht hinreichen, so wendet man zwei derselben über Kreuz gebundene an, und läſst vier Arbeiter darauf wirken. Bemerkt man beim Gebrauch des Tegelbohrers, daſs derselbe auf einen Stein gekommen ist, so zieht man ihn heraus, und befestiget an seiner Stelle den *Meiſsel e* auf dieselbe Weise mit der Brunnstange, wie dieses mit dem Tegelbohrer geschah. Das Herausziehen geschieht mittelst des Zugseiles, durch welches früher der Fuchs gehoben wurde, indem man nach Wegnahme des Schlegels das Seil mittelst eines Hakens in eines der runden Löcher der Brunnstange befestiget, und dann die Arbeiter am andern Ende des über die Rolle gehenden Seiles ziehen läſst. Der Meiſsel wird aber nicht wie ein Bohrer gebraucht, sondern man hebt ihn $^1/_2$ F. hoch in die Höhe, läſst ihn dann auf den Stein fallen, hebt ihn wieder, gibt ihm eine kleine Wendung, läſst ihn wieder fallen, und fährt so fort, bis der Stein zersplittert ist. Ist dieses erfolgt, so zieht man den Meiſsel heraus, und hängt statt desselben den *Steinbohrer f* ein. Die Kanten desselben reiben beim Drehen den Stein vollends aus, und bringen ihm jene Öffnung bei, welche erforderlich ist. Kommt man nach Durchbrechung des Steines wieder auf Tegel, so versteht es sich von selbst, daſs man neuerdings den Tegelbohrer anzuwenden hat. Kommt man so tief, daſs eine Brunnstange

nicht mehr zulangt, so befestiget man an die erste eine zweite, an diese eine dritte, u. s. w. Je mehr Stangen man bereits braucht, so schwerer hält es, sie zu regieren und heraus zu ziehen. Oft muſs man zum letzteren Zwecke das Seil an die Welle eines Kreuzhaspels befestigen, und durch Drehen des Haspels die Stange aufziehen. Bei diesem Aufziehen leistet das *Aushalteisen g* gute Dienste. Dieses ist, wie die Figur zeigt, gekrümmt, hat eine Länge von 1 1/2 F., ist am Stiele flach gefeilt, damit es auf der Röhre fest aufliegen kann, übrigens aber rund. Es wird, wenn man den Bohrer aufzieht, geschwind untergelegt, während man in das Loch der Stange einen Eisenstab vorsteckt. Bricht an einer Brunnstange eine Warze, so trennt sie sich von der anderen oder vom Bohrer, und letzterer bleibt im Bohrloch stecken. Um ihn heraus zu bekommen, wendet man den *Zieher h* an. Dieser ist eine mit Warze und Loch wie ein Bohrer versehene Stange mit einer schraubenförmigen Krümmung wie ein Pfropfzieher. Er wird an die am Zugseil befindliche Brunnstange eingehängt, in das Bohrloch hinab gelassen und dann so lange gedreht, bis die Spitze sich in das Loch des Bohrers oder der stecken gebliebenen Stange einhängt. Sobald dieses geschicht, zieht man den Zieher und mit diesem den Bohrer auf. Es geschieht auch manchmal, daſs eine Stange bricht. Um in einem solchen Falle das im Bohrloch zurückgebliebene Stück heraus zu bekommen, braucht man die *Greifzange i*. Diese läſst sich mit einem Ende gerade so wie ein Bohrer mit einer Brunnstange verbinden, hat aber am anderen Ende zwei aufwärts gekrümmte Haken, mit denen sie das Stangenstück ergreifen und festhalten kann.

Dieses einfache Verfahren ist völlig hinreichend, um in der Gegend von Wien einen Artesischen Brunnen

zu erhalten. Es gibt ohne Zweifel viele Gegenden, wo dasselbe der Fall ist, und für die Bewohner derselben ist diese kurze Beschreibung bestimmt, um sie in den Stand zu setzen, sich mit sehr wenigen Kosten und in kurzer Zeit der ungemein grofsen Wohlthat der Artesischen Brunnen theilhaftig zu machen.

---

# VII.
# Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

## *A.* Meteorologie.

### 1. Über den Winter von 1829 — 1830. Von *D'Hombres Firmas.*

*(Bibl. univ. Janv. 1831, p. 73)*

Der Winter von 1829 — 1830 wird lange eine meteorologische Merkwürdigkeit bleiben, und gleichsam den Mafsstab für folgende strenge Winter abgeben müssen; er dürfte wohl auch besonders dazu geeignet seyn, uns über den allgemeinen Gang der Witterung Fingerzeige zu geben. Dazu ist aber eine Vergleichung dieses merkwürdigen Winters mit anderen, das gewöhnliche Mafs nicht stark überschreitenden, nöthig, wie sie der Verfasser dieses Aufsatzes nach den zu Alais angestellten Beobachtungen liefert. Wir heben von diesem Aufsatze besonders folgende Tabelle heraus, welche die merkwürdigen Meteore der Winter in den Jahren 1820 und 1830 mit dem aus 28 Beobachtungsjahren sich ergebenden Mittel enthält:

| Beobachtungen. | 1819—1820. | 1829—1830. | Mittelzahl aus 28 Jahren. |
|---|---|---|---|
| Gröfste Wärme . . . | 21°.25 C. | 20° C. | 22° C. |
| Gröfste Kälte . . . . | — 12°.25 | — 10°.75 | — 12°.25 |
| Mittlere Wärme . . . | 7° | 2° | 6°.25 |
| Herrschender Wind | N. | N. | N. |
| Tage mit heftigem Wind | 50 | 25 | 40 |
| Tage, wo es reifte . . | 38 | 66 | 32 |
| Tage, wo es schneite . | 4 | 11 | 3 |
| Dauer des Schnees . . | 16 | 54 | 0 |
| Regen bei Tage . . . | 16 | 9 | 16 |
| Regen des Nachts . . | 26 | 10 | 18 |
| Regenmenge für den Tag | 83″.6 | 85″.5 | 93″.4 |
| Regenmenge für d. Nacht | 195″.75 | 72″.25 | 136″.2 |
| Anzahl schöner Tage . | 42 | 57 | 52 |
| Trübe od. wolkige Tage | 49 | 34 | 39 |

## 2. Resultate der zu Genf und im Hospiz auf dem grofsen Bernard im Jahre 1830 angestellten meteorologischen Beobachtungen.

*(Bibl univ. Janv. 1831, p. 87.)*

Die meteorologischen Beobachtungen, welche regelmäfsig zu bestimmten Stunden zu Genf und im Hospiz des grofsen Bernards angestellt werden, sind wegen der geringen horizontalen Entfernung beider Stationen und ihres bedeutenden Höhenunterschiedes (von 6415.38 P.F.) merkwürdig, und werden darum hier aufgenommen. Vorläufig mufs aber bemerkt werden, wie man die jährlichen Mittel aus den einzelnen Tagesbeobachtungen gefunden hat. Dem gewöhnlichen Verfahren gemäfs sucht man das arithmetische Mittel jedes einzelnen Monates, indem man die Summe der mittleren Resultate jedes Tages mit der im betreffenden Monate vorkommenden Tagesanzahl dividirt, und auf ähnliche Weise das jährliche Mittel aus den monatlichen Durchschnitts-

resultaten. Da aber jedes Mittel der Quotient ist, den man erhält, wenn man die Summe der Beobachtungsresultate durch die Anzahl der Beobachtungen theilt, so begeht man nach ersterer Methode einen Fehler, indem nicht jedes Monat dieselbe Tagesanzahl enthält. Sind nämlich $s$, $s'$, $s''$ etc. die den einzelnen Tagen entsprechenden Mittel, welche sich aus $n$, $n'$, $n''$ etc. Beobachtungen ergeben, endlich die ganze Anzahl aller Beobachtungen $= \nu$; so erhält man auf dem meistens betretenen Wege als Mittelwerth den Ausdruck

$$\frac{\frac{s}{n} + \frac{s'}{n'} + \frac{s''}{n''} + \cdots}{\nu},$$

während das genaue Mittel durch

$$\frac{s + s' + s'' + \cdots}{n + n' + n'' + \cdots}$$

gegeben ist. Ersterer Ausdruck ist dem letzteren nur dann gleich, wenn $n = n' = n''$, d. h. in unserem Falle, wenn jeder Monat gleich viele Tage enthält. Der Fehler, den man gewöhnlich auf diese Weise begeht, ist zwar nicht groſs, aber doch auch nicht so klein, daſs man ihn ganz vernachlässigen könnte, um so mehr, als sich solche Mittel ihrer Natur nach von Jahr zu Jahr nicht stark ändern, und daher mit aller Schärfe berechnet werden müssen. Er betrug für das in Rede stehende Jahr für die Temperatur $^1/_{10}{}^0$ *R.*, für den Barometerstand $^2/_{11}$ L., für den Hygrometerstand $^2/_{10}{}^0$. Die Beobachtungen wurden täglich drei Mal angestellt, und zwar um 9 U. früh, zu Mittag, und um 3 U. Nachmittag; vom Thermometerstand beobachtete man überdieſs noch das Maximum und Minimum. In der folgenden Tabelle sind diese Resultate auf solche Weise angegeben, daſs bei der für den Thermometerstand bestimmten Columne die erste Zahl das Minimum, die zweite das Max., die

dritte den daraus entspringenden Mittelwerth ausdrückt (die übrigen Thermometerbeobachtungen wurden weggelassen), die Columne für den Barometer- und Hygrometerstand gibt in der ersten Zahl das um 9 U. früh, in der zweiten das zu Mittag, und in der dritten das um 3 U. Nachmittag erhaltene Resultat. Hier folgen die Tabellen.

1. Beobachtungsresultate, erhalten zu Genf, 208.77 Toisen über der Meeresfläche, geog. Breite 46° 12′, geog. Länge 3° 49′ (der Zeit nach 15′ 16″) östlich von Paris.

| Monat. | Thermometerstand. | Barometerstand. | | | Hygrometerstand. | Regen u. Schnee. | | Winde, | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | Wassermenge. | Tagezahl. | südliche. | nördliche. |
| | Grad R. | Z. | L. | P. | Grad R. | | | | |
| | — 7.52 | 26 | 10 | 5.94 | 94 29 | | | | |
| Jänner | 2.56 | 26 | 10 | 2.26 | 85.03 | 2‴.17 | 5 | 48 | 33 |
| | — 5.04 | 26 | 9 | 15.42 | 87.65 | | | | |
| | — 4.15 | 26 | 10 | 13 43 | 88.89 | | | | |
| Februar | 2.63 | 26 | 10 | 13.85 | 80.36 | 8‴.26 | 6 | 30 | 31 |
| | — 1.76 | 26 | 10 | 9.50 | 79.78 | | | | |
| | 0.58 | 27 | 1 | 7.39 | 82.68 | | | | |
| März . | 10.15 | 27 | 1 | 3.58 | 73 03 | 11‴.42 | 7 | 31 | 55 |
| | 5.36 | 27 | 0 | 13.65 | 68.52 | | | | |
| | 5.92 | 26 | 10 | 11.17 | 80.17 | | | | |
| April . | 13.44 | 26 | 10 | 9.47 | 74.17 | 42‴.51 | 14 | 48 | 34 |
| | 9.68 | 26 | 10 | 6.63 | 73.97 | | | | |
| | 7.02 | 26 | 10 | 5.65 | 80.74 | | | | |
| Mai . . | 15.60 | 26 | 10 | 4.58 | 71.61 | 36‴.21 | 11 | 32 | 49 |
| | 11.31 | 26 | 9 | 15.77 | 65.71 | | | | |
| | 8.82 | 26 | 10 | 7.53 | 76.66 | | | | |
| Juni . . | 17.42 | 26 | 10 | 5.73 | 70.40 | 54‴.46 | 13 | 45 | 40 |
| | 13.12 | 26 | 10 | 3.33 | 70.63 | | | | |
| | 10.79 | 26 | 11 | 12.45 | 77.16 | | | | |
| Juli . . | 20.20 | 26 | 11 | 11.84 | 69.71 | 26‴.69 | 14 | 33 | 57 |
| | 15.49 | 26 | 11 | 7.03 | 67.19 | | | | |
| | 9 51 | 26 | 11 | 1.74 | 71.87 | | | | |
| August | 19.32 | 26 | 10 | 15.42 | 66.42 | 31‴.10 | 8 | 49 | 32 |
| | 14.41 | 26 | 10 | 9.80 | 63.39 | | | | |
| | 7 77 | 26 | 10 | 12.17 | 82.07 | | | | |
| Sept. . | 14.04 | 26 | 10 | 6.67 | 74.87 | 67‴.37 | 16 | 41 | 25 |
| | 10.91 | 26 | 10 | 3.80 | 74.90 | | | | |

| Monat. | Thermometerstand. | Barometerstand. | | | Hygrometerstand. | Regen u. Schnee. Wassermenge. | Regen u. Schnee. Tagezahl. | Winde südliche. | Winde nördliche. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Grad R. | Z. | L. | P. | Grad R. | | | | |
| October | 2.95<br>11.31<br>7.13 | 27<br>27<br>27 | 1<br>1<br>1 | 9.61<br>9.22<br>4.77 | 84.10<br>74.73<br>71.87 | 6‴.80 | 4 | 23 | 56 |
| Nov. | 1.19<br>7.70<br>4.44 | 26<br>26<br>26 | 11<br>11<br>11 | 12.57<br>10.17<br>4.40 | 89.90<br>78.53<br>79.13 | 68‴.27 | 9 | 28 | 38 |
| Dec. | — 1.92<br>2.69<br>0.38 | 26<br>26<br>26 | 7<br>7<br>7 | 14.23<br>11.29<br>9.36 | 88.32<br>80.87<br>82.13 | 32‴.17 | 13 | 47 | 23 |
| Durchschnitt aus d. Max. und Min. | 7.25 | 26 | 10 | 14.68 | 78.47 | 32″ 3‴.42 | 120 | 455 | 473 |

Der höchste Thermometerstand trat mit 26°.2 am 5. August, der niedrigste mit — 17°.4 am 26. December ein. Der Spielraum beträgt demnach 43°.6. Der höchste Barometerstand wurde am 1. Jänner um 9 Uhr mit 27″ 10‴.14,68, der niedrigste am 9. Dec. um 3 Uhr mit 27″ 3‴.14 beobachtet. Der höchste Hygrometerstand trat (mit 100°) im Jänner, November etc., der niedrigste (mit 40°) am 30. März ein. Die jährliche Variation ist daher = 60°.

2. Beobachtungsresultate, erhalten im Hospiz auf dem grofsen Bernard, 1278′ über der Meeresfläche.

| Monat. | Thermometerstand. | Barometerstand. | | Hygrometerstand. | Regen u. Schnee. Wassermenge. | Regen u. Schnee. Tagezahl. | Winde, südliche. | Winde, nördliche. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Grad R. | Z. | L. | Grad R. | | | | |
| Jänner | —11.68<br>7.46<br>— 9.57 | 20<br>20<br>20 | 7.42<br>7.31<br>7.20 | 89.22<br>87.90<br>89.06 | 17‴ | 5 | 45 | 48 |
| Februar | — 9.09<br>2.35<br>— 5.72 | 20<br>20<br>20 | 8.61<br>8.61<br>8.58 | 89.50<br>85.39<br>85.71 | 20‴ | 4 | 37 | 46 |
| März | — 6.37<br>0.99<br>— 2.69 | 20<br>20<br>20 | 11.76<br>11.83<br>11.40 | 87.68<br>83.35<br>84.74 | 28‴ | 4 | 23 | 69 |

| Monat. | Thermo-meter-stand. | Barome-terstand. | Hygro-meter-stand. | Regen u. Schnee. Wasser-menge. | Tage-zahl. | Winde, süd-liche. | nörd-liche. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Grad R. | Z. L. | Grad R. | | | | |
| April . . . | — 3.60<br>4.70<br>0.55 | 20 10.73<br>20 10.79<br>20 10.61 | 86.50<br>82.63<br>83.13 | 60‴ | 12 | 40 | 50 |
| Mai . . . . | — 2.15<br>6.05<br>1.95 | 20 10.82<br>20 10.91<br>20 10.91 | 84.32<br>81.07<br>80.61 | 27‴ | 8 | 57 | 36 |
| Juni. . . . | — 1.27<br>6.68<br>2.70 | 20 10.45<br>20 10 49<br>20 10.50 | 86.27<br>82.87<br>85.00 | 23‴.58 | 8 | 47 | 43 |
| Juli . . . . | 2 30<br>9.07<br>5.68 | 21 1.12<br>21 1.15<br>21 1.16 | 84.00<br>81.90<br>81.94 | 33‴.58 | 6 | 55 | 38 |
| August . . | 1.27<br>8.60<br>4.98 | 21 0.27<br>21 0.28<br>21 0.26 | 83.90<br>82.16<br>81.55 | 28‴.75 | 3 | 44 | 49 |
| September | — 1.71<br>3.46<br>0.87 | 20 10.65<br>20 10.67<br>20 10.62 | 89.53<br>87.33<br>87.40 | 129‴.57 | 12 | 37 | 52 |
| October . | — 2.43<br>3.21<br>0 39 | 21 0 99<br>21 1.09<br>21 0.92 | 83.71<br>81.90<br>81.32 | 5‴.75 | 3 | 18 | 75 |
| November | — 5.85<br>1.00<br>— 3.42 | 20 11.03<br>20 10.92<br>20 10 85 | 86.90<br>85.10<br>85 50 | 48‴ | 8 | 57 | 33 |
| December | —10.37<br>5.36<br>— 7.86 | 20 6.56<br>20 6.44<br>20 6.42 | 83.68<br>83.00<br>84.23 | 131‴ | 11 | 51 | 39 |
| Durchschnitt aus dem Max. und Min. . . | — 0.99 | 20 10 59 | 84.96 | 46″ 0‴.23 | 84 | 511 | 578 |

Die gröſste Kälte (von —20.6) fiel auf den 2. Februar, die gröſste Hitze (von 13.4) auf den 16. Juli und 3. August. Die Differenz beider beläuft sich auf 34°.0. Der höchste Barometerstand ſand am 22. October um 9 Uhr Vormittags und um 3 Uhr Nachmit-

tags mit 21″ 3‴.9, der kleinste mit 20″ 0‴.5 am 25. Dec. Statt. Das Hygrometer stand am höchsten (auf 100°) am 18. Sept. um 9 Uhr, am niedrigsten (67°) am 14. April Mittags, sein Spielraum beläuft sich auf 33°.

## *B.* Electricität.

### 1. Über die Contraction der in der electrischen Kette befindlichen Thiere beim Öffnen der Kette. Von *Matteuci.*

*(Bibl. univ. Fev. 1831, p. 113.)*

Die Zuckungen, welche Thiere im electrischen Kreise beim Schliefsen und Öffnen desselben erleiden, sind in der neuesten Zeit von *Marianini* mit besonderem Fleifse studirt worden. Seine über diesen Gegenstand erschienene wichtige Arbeit enthält der fünfte Band dieser Zeitschrift. Dieser fleifsige und geschickte Physiker beschränkte sich aber nicht blofs auf die Erörterung der Phänomene dieser Zuckungen, sondern er liefs sich auch in eine Untersuchung der Gründe derselben ein. Seiner Ansicht nach condensirt sich die Electricität im Nervensysteme der im electrischen Kreise befindlichen thierischen Organe, und verläfst dasselbe, sobald der electrische Strom keine Contraction mehr bewirkt. Auf diese Ansicht brachten ihn vorzüglich mehrere Versuche. Bei einem derselben sah er einen Frosch in Zuckungen gerathen, als ein besserer der Electricität dargebotener Leiter derselben eine andere Richtung gab, die doch unterblieb, wenn man den Strom durch Ausheben eines der Conductoren der Säule unterbrach; bei einem anderen wurde ein Stofs bemerkt, als man den Strom eintreten liefs, nicht aber als derselbe unterbrochen wurde; endlich erfuhr er, dafs die Stärke der Zuckungen beim Öffnen der Kette in dem Mafse zunimmt,

als dieselben beim Schliefsen derselben schwächer werden. *Matteuci* gibt aber die von *Marianini* hieraus gefolgerte Ansicht nicht zu. Das Eintreten der Zuckungen bei der Anwendung eines besseren Leiters beim ersten Versuche sieht *Matteuci* als nothwendige Folge des Aufhörens des Stromes durch den Frosch an, welches Aufhören nothwendig eintreten mufste, da der Electricität ein besserer Leiter dargeboten wurde; das Resultat des zweiten Versuches spricht seiner Meinung nach nicht für *Marianini's* Ansicht, endlich jenes des letzten Versuches zieht er völlig in Zweifel, da es mit den Erfahrungen *Nobili's* und seinen eigenen nicht in Übereinstimmung zu bringen ist. *Matteuci* versucht nun eine eigene Erklärung des betreffenden Phänomens, und führt Versuche zur Unterstützung derselben an. Wir wollen ihn selbst hören:

Es unterliegt keinem Zweifel, dafs sich die thierischen Fibern bei der Contraction in einem, von ihrem natürlichen ganz verschiedenen Zustande befinden. Die schönen Versuche von *Edwards*, *Home*, *Prevost* und *Dumas* über den Bau der Muskelfaser und der Vertheilung der Nervenfiber in derselben zeigen sattsam, dafs sich dieselben im Augenblicke der Contraction stets an derselben Stelle biegen und einen Winkel bilden, an dessen Spitze die Nervenfasern sich enden. Man braucht nicht, um sich die Überzeugung zu verschaffen von der buchichten Gestalt des contrahirten Muskels, wie *Prevost* und *Dumas* gethan haben, zu einem Mikroskope die Zuflucht zu nehmen, es ist genug, einen durch eine 15 — 20paarige Säule entstandenen Strom durch ein frisches und dünnes Muskelstück, wie z. B. vom *sterno-pubianus*, gehen zu lassen. Da sieht man mit freiem Auge, wie sich die Fibern zurückziehen, und wenn der Strom aufgehört hat, wieder in die alte Lage zurückkeh-

ren. Noch besser läfst sich dieses Phänomen beobachten, wenn man den Muskel auf ein Stück weifses Papier legt, und sowohl auf diesem als auf dem Muskel eine continuirliche gerade schwarze Linie zieht; auch an den Zehen der Thiere kann man diese Beobachtung machen, und sehen, dafs dieselben nach Beendigung der electrischen Strömung wieder in die alte Lage zurückkehren. Warum soll man denn nun die bei Unterbrechung des electrischen Stromes eintretende Contraction nicht von der Bewegung der verschiedenen Theile der Muskel, die ihren alten Platz wieder einnehmen, herleiten? Natürlich tritt die Rückkehr des Muskel- und Nervensystemes in seine alte Lage am kräftigsten in den ersten Momenten nach dem Tode ein, und findet mit derselben Stärke und Schnelligkeit Statt, wie die Verrückung aus der natürlichen Lage. Diese Meinung wird durch eine Thatsache unterstützt, die ich oft bemerkt habe, nämlich, dafs die Stöfse beim Öffnen der Kette bei einem directen Strome (vergleiche Bd. VIII., S. 233) desto heftiger sind, je intensiver der Strom ist, und je kürzere Zeit er angehalten hat, während bei einem indirecten Strome nach *Nobili's* Bemerkung ein entgegengesetztes Verhalten eintritt. Die Fibern nämlich, welche durch zu langes Anhalten des electrischen Stromes ihre natürliche Elasticität verloren haben, nehmen schwer ihre natürliche Lage wieder an. Diesem widerspricht *Marianini's* Bemerkung nicht, dafs selbst dann Zuckungen beim Öffnen der Kette eintreten, wenn deren keine beim Schliefsen derselben Statt gefunden haben. Auch in diesem Falle bringt der Strom seine Wirkung bei seinem Beginnen hervor, und die gewöhnliche Contraction erfolgt nur nach und nach, wenn der Strom langsam eintritt. Ist die Lebenskraft fast erschöpft, so bleiben nach meinen Bemerkungen die Zuckungen unter dem

Einflusse des directen Stromes aus, und die im ersten Augenblicke des Stromes contrahirten Muskelfibern nehmen ihre natürliche Lage selbst während der Dauer des Stromes an, wo dann natürlich die Zuckung beim Öffnen der Kette unterbleiben muſs.

Da nun meiner Erklärung nichts entgegen steht, so will ich auch daraus über die von *Lehot* und *Bellingieri* beobachteten Thatsachen Rechenschaft geben. Zu diesem Ende wollen wir die unter dem Einflusse eines electrischen Stromes an einem Frosche in den verschiedenen Perioden seiner Vitalität Statt findenden Phänomene kurz erwähnen.

So lange der Frosch noch lebhaft ist, treten sowohl beim Schlieſsen als beim Öffnen der Kette Zuckungen ein, der Strom mag ein directer oder umgekehrter seyn, und zwar immer mit derselben Stärke. Hierauf werden die Zuckungen bei Unterbrechung des directen Stromes schwächer, natürlich, weil in dem Maſse, als die Fibern ihre Elasticität verlieren, auch das Bestreben, in ihre natürliche Lage zurück zu kehren, geringer wird. Der umgekehrte Strom erzeugt beim Schlieſsen der Kette fast keine Zuckung, weil die Oberfläche des Muskels nicht hinreichend feucht ist, und daher der Strom die Muskelfibern nicht mit gehöriger Schnelligkeit durchlaufen, den Nervenfasern nicht begegnen, und daher nicht in den Hauptstamm eindringen kann; ist aber die Kette einige Zeit lang geschlossen, so stellen sich nach und nach beide Zuckungen, die idiopathischen und die sympathischen, ein. Ist die Kette offen, so nehmen die verschiedenen Theile ihre natürliche Lage mit gröſserer Kraft an, als wenn man es mit einem directen Strome zu thun gehabt hat, und zwar, weil die idiopathische Zuckung hinzukommt. Trocknet man den Muskel und Nerv gut ab, so haben, meinen Beobachtungen zu Folge,

die Zuckungen beim Schliefsen und Öffnen der Kette Statt. Daraus erklärt es sich, warum die Contractionen desto kräftiger erfolgen, je länger der Strom angehalten hat.

So wie die Vitalität noch mehr abnimmt, hören die Zuckungen beim Unterbrechen des directen und beim Eintreten des umgekehrten Stromes auf, auch werden sie beim Unterbrechen des letzteren immer schwächer. Nach Verlauf einer gewissen Zeit finden endlich keine Zuckungen mehr Statt, man mag die Kette öffnen oder schliefsen, und der Strom mag was immer für eine Richtung haben.

Aus allen diesem schliefst nun *Matteuci:*

1) Man hat keinen Grund anzunehmen, das musculonervöse System condensire unter dem Einflusse des electrischen Stromes die Electricität, wie dieses *Marianini* zur Erklärung der beim Öffnen der Kette eintretenden Zuckungen annimmt.
2) Diese Zuckungen rühren vielmehr von der Rückkehr der Muskelfasern in ihre natürliche Lage, aus der sie durch den electrischen Strom gebracht worden sind, her.

## 2. Gesetze der Fortpflanzung der Electricität. Von *Bigeon.*

*(Ann. de Chim. et de Phys. Janv. 1831, p. 80)*

Bei unserer völligen Unbekanntschaft mit dem inneren Grunde der electrischen Erscheinungen und dem jedem denkenden Manne eigenen Bestreben, für das Unbekannte einen Faden zu finden, der es an das, wenn auch nicht völlig, doch mehr Bekannte knüpft, kann man wohl keinen Versuch, der eine Relation zwischen den Gesetzen der electrischen Erscheinungen und denen des Lichtes oder der Wärme nachweiset, unbeachtet vor-

übergehen lassen. Aus diesem Grunde müssen hier die von *Bigeon* bekannt gemachten galvanometrischen Versuche, wie er sie nennt, erwähnt werden, weil sie die Ähnlichkeit zwischen den Modificationen der im Fortschreiten begriffenen Electricität und der Wärme näher darstellen, als es frühere Versuche von *La Rive*, *Marianini* etc. thaten.

*Bigeon* beabsichtigte anfangs bloſs einen Gedanken *Ampère's* zu prüfen, und den Einfluſs des Zustandes jenes Theils der Oberfläche der electromotorischen Metalle, der mit dem flüssigen Leiter in Berührung steht, auf die Fortpflanzung der Electricität durch diese Metalle zu untersuchen, aber da er schon einmal im Besitz der Apparate war, so glaubte er gleich weiter gehen, und auch einige schon früher von *Marianini* angestellte Versuche wiederholen zu müssen. Demnach untersuchte er 1) den Einfluſs des Zustandes der Oberfläche, 2) der Neigung der eingetauchten Platten, 3) die Gröſse, 4) die gegenseitige Entfernung derselben.

1) *Zustand der Oberfläche.* Um den vom Zustande der Oberfläche herrührenden Effect kennen zu lernen, wurden fünf Kupferplatten gebraucht. Eine derselben blieb eben, die zweite erhielt drei einander ziemlich nahe Löcher, die stark hervorstehende Ränder hatten, die dritte quadratförmige, durch zwei Systeme paralleler, an der Vorderfläche eingravirter Linien entstandene Zeichnungen, die vierte wurde nach verschiedenen Richtungen ohne besondere Regel mittelst einer Feder geritzt, die letzte endlich hatte die Natur des Rauschgoldes. Da ergaben sich nun mit einer Mischung aus verschiedenen Säuren mittelst eines Torsionsapparates (einer Drehwage) im Mittel aus mehreren Versuchen folgende Resultate:

| | Wasser mit $^1/_{80}$ Schwefelsäure. | | Wasser mit $^1/_{40}$ Salpeters. |
|---|---|---|---|
| | Faden Nr. 1. | Faden Nr. 2. | Faden Nr. 3. |
| Ebene Platte . . | 565° | 45° | 315° |
| Quadrillirte Platte . | 650° | 46° | 335° |
| Platte mit Löcher . | 670° | 50° | 350° |
| Rauh gefeilte Platte | 600° | 45° $^1/_2$ | 320° |
| Rauschgold . . . | 450° | 36° | — |

Es scheint sich demnach das electrische Fluidum leichter durch eine gefurchte, unpolirte oder rauhe Fläche fortzupflanzen, als durch eine glatte. Der Unterschied im Fortleitungsvermögen ist zwar nicht sehr groſs, aber doch merklich, und dieser Umstand bietet eine neue Analogie dar zwischen den Phänomenen der Berührungselectricität und jenen der Wärme.

2) *Neigung der eingetauchten Platten gegen einander.* Um den Einfluſs der Neigung ersichtlich zu machen, wurde eine Kupferplatte auf einer Seite mit einem Wachsüberzug versehen, und die Zinkplatte senkrecht auf die Linie gestellt, welche die Mittelpuncte der Platten mit einander verband, hierauf aber die Kupferplatte unter verschiedenen Winkeln gegen diese Linie geneigt. Als leitende Flüssigkeit wurde durchaus gesäuertes Wasser angewendet; wie man es zu *Volta*'schen Säulen zu brauchen pflegt, um die Resultate dieser Versuche auf den Bau solcher Säulen anwenden zu können; weil aber die Wirkung anfangs wohl sehr stark ist, aber deſshalb auch schnell abnimmt, und daher zu jedem einzelnen Versuche wenig Zeit blieb, so muſste jeder derselben hinreichend oft wiederholt werden. Hier folgt eine Reihe von solchen Versuchsresultaten, bei denen die Platten parallel standen, oder um 45° oder um 90° gegen einander geneigt waren:

| Neigung. | Torsion. | | | Mittelwerth. |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 213° | 204° | 197° | 203° |
| 45° | 203° | 196° | 190° | 195° |
| 90° | 193° | 191° | 180° | 188° |
| 45° | 198° | 194° | 189° | — |
| 0° | — | — | 199° | — |

Es nimmt demnach die Wirkung ab, wenn die Neigung wächst, gerade so, wie es beim Licht und der Wärme der Fall ist; doch befolgt diese Abnahme ein anderes Gesetz. Die Wirkung der Hinterfläche ist nicht = 0, doch ist sie viel geringer als jene der Vorderfläche; als man nämlich nach und nach der Zinkseite die mit Wachs bedeckte und die nackte Kupferfläche zukehrte, erhielt man im Mittel aus mehreren Versuchen folgende Zahlenwerthe:

Wirkung der Vorderfläche . 169,
» » Hinterfläche . 84,
Totaleffect . . . . . . . 239.

Diese Versuche wurden mit Platten von 6 L. breite und bei einer Entfernung von 2 L. angestellt. Wurden diese einander sehr nahe gebracht, so erschien die Wirkung der Hinterfläche außer Verhältniß kleiner.

3) *Größe der eingetauchten Oberfläche.* Es wurden Platten von 12 L. Breite eingesenkt, wie folgt, und man erhielt die ihnen gegenüberstehenden Torsionen als Repräsentanten der Größe des electrischen Stromes:

| Kupferplatte. | Zinkplatte. | Torsion. |
|---|---|---|
| 3 L. | 3 L. | 75° |
| 6 » | 3 » | 116° |
| 9 » | 3 » | 146° |
| 12 » | 3 » | 172° |
| 15 » | 3 » | 190° |

| Kupferplatte. | Zinkplatte. | Torsion. |
|---|---|---|
| 3 L. | 6 L. | 80° |
| 6 » | 6 » | 122° |
| 9 » | 6 » | 155° |
| 12 » | 6 » | 188° |
| 15 » | 6 » | 213° |
| 3 » | 9 » | 83° |
| 6 » | 9 » | 131° |
| 9 » | 9 » | 165° |
| 12 » | 9 » | 193° |
| 15 » | 9 » | 222° |

Man erlangt demnach den gröſsten Effect, wenn von der Kupfer- und Zinkplatte gleich viel eingetaucht ist, was auch leicht einzusehen ist, indem das Maximum des Effectes offenbar dann eintreten muſs, wenn jeder Punct der Zinkfläche möglichst wenig Fluidum ausstrahlt, und in einer kleinen Entfernung die entsprechende Kupferfläche findet, die dasselbe absorbirt.

4) *Entfernung der eingetauchten Leiter.* Jede Kupfer- und Zinkplatte hatte Dimensionen von 14 auf 15 L., und sie waren gegen einander parallel aufgestellt. Aus zwei Versuchsreihen, die mit zwei Torsionsfäden angestellt wurden, ergaben sich folgende Resultate:

| Distanz der Platten. | Torsion. | Distanz der Platten. | Torsion. |
|---|---|---|---|
| 21 L. | 377° | 3 L. | 493° |
| 12 » | 516° | 6 » | 441° |
| 6 » | 629° | 9 » | 358° |
| 3 » | 788° | 12 » | 313° |
| 1/2 » | 972° | 21 » | 318° |
| 12 » | 958° | 21 » | 318° |
| 3 » | 748° | 12 » | 390° |
| 6 » | 551° | 6 » | 463° |
| 12 » | 462° | 3 » | 531° |
| 21 » | 360° | — » | — |

Je gröfser also die Entfernung der Platten von einander ist, desto kleiner fällt die Wirkung aus.

5) *Relative electromotorische Kraft verschiedener Flüssigkeiten:*

Wasser mit $^1/_{80}$ Rth. Schwefelsäure. Mittlere Kraft 106°. Das Zink löste sich schnell auf unter heftiger Gasentwickelung.

Wasser mit $^1/_{40}$ Salzsäure, wie sie im Handel vorkommt. Mittlere Kraft 58°. Wirkung auf das Zink wie bei der Schwefelsäure.

Wasser mit $^1/_{40}$ Salpeter- und $^1/_{80}$ Salzsäure. Mittlere Kraft 59°. Keine Gasentwickelung am Zink.

Wasser mit $^1/_{80}$ Salpeter- und $^1/_{160}$ Schwefelsäure. Mittlere Kraft 96°. Keine Hydrogengasentwickelung am Zink.

Wasser mit $^1/_{80}$ Salpeter- und $^1/_{80}$ Schwefelsäure. Mittlere Kraft 120°. Sehr schwache Hydrogengasentwickelung am Zink.

Merkwürdig ist es, dafs die Salpetersäure die auflösende Wirkung der Schwefelsäure und Salzsäure auf das Zink hemmt; eine Eigenschaft, welche diese Säure in hohem Grade besitzt. Während eine Zinkplatte in Wasser mit $^1/_{80}$ Rth. Schwefelsäure in 8 Stunden ganz aufgelöset war, hatte eine Mischung von Wasser mit $^1/_{80}$ Salpetersäure und $^1/_{80}$ Schwefelsäure in derselben Zeit kaum die halbe Wirkung gethan.

## *C.* Optik.

### Elliptische Polarisation des Lichtes.
### Von *Brewster*.

Wer sich mit den optischen Wissenschaften beschäftiget, weifs, dafs wir bereits eine zweifache Polarisation des Lichtes kennen, nämlich die geradlinige und die cir-

culäre, von deren erstere selbst wieder von einigen Physikern in die fixe und bewegliche getheilt wird. *Brewster* zeigt nun das Daseyn einer dritten, nämlich der elliptischen, und weiset nach, daſs dieselbe dem Lichte durch Metallflächen ertheilt wird. Sein in vielfacher Beziehung wichtiger Aufsatz ist in dem Londner *Phil. transact.* für 1830, P. II. enthalten, und auch bereits im Auszuge im *Bull. des sc. math et phys.* aufgenommen. Was hier erscheint, ist aus letzterer Quelle, Nov. 1830, p. 337, entlehnt. *Brewster's* Arbeit zerfällt in drei Theile; der erste handelt von der Wirkung der Metalle auf unpolarisirtes, der zweite von ihrer Wirkung auf polarisirtes Licht. Wir wollen das Wichtigste aus diesen beiden hier anführen, den dritten aber nächstens folgen lassen.

Läſst man einen gewöhnlichen Lichtstrahl unter verschiedenen Winkeln auf eine Metallfläche auffallen, und leitet ihn dann durch einen Doppelspath, so findet man ihn zum Theile in der Reflexionsebene polarisirt. Dasselbe erkennt man noch besser mittelst der polarisirten Farbenringe; diese erscheinen bei einem Einfallswinkel von 74°, vom Einfallsloth an gerechnet, am lebhaftesten, zum Beweise, daſs die Strahlen unter diesem Winkel der vollkommenen Polarisation am nächsten stehen. Versucht man die Einwirkung mehrerer Metalle auf das Licht, so findet man diese nach Maſsgabe ihrer verschiedenen materiellen Beschaffenheit auch verschieden. Sie folgen so auf einander, von demjenigen angefangen, dessen Einwirkung am stärksten ist: Bleiglanz, Blei, Kobaltglanz, Arsenikkobalt, Schwefelkies, Antimon, Stahl, Zink, Spiegelmetall, Platin, Wismuth, Quecksilber, Kupfer, gekörntes Zinn, Messing, gewalztes Zinn, Juwelirgold, feines Gold, gemeines Silber, feines Silber. Erleidet ein Strahl auf Metallplatten derselben Natur mehrere Reflexionen hinter einander, so rückt

er dem vollkommenen Polarisationszustande immer näher. So z. B. erscheint ein Lichtstrahl, den eine Kerzenflamme liefert, deren Entfernung von der reflectirenden Fläche 10 F. beträgt, nach 8 Reflexionen an einer Stahlplatte vollkommen polarisirt, wenn die Incidenzen innerhalb der Winkel von 60° — 80° vor sich gehen. Wenigere solche Reflexionen reichen hin, wenn der reflectirende Körper Bleiglanz oder Blei, mehrere werden erfordert, wenn die vollkommene Polarisation durch polirtes Silber erzielt werden soll; im letzteren Falle nimmt der Strahl auch mehr und mehr eine rothe Farbe an.

Anders ist die Wirkung der Metalle auf schon polarisirtes Licht. Fällt ein polarisirter Strahl auf eine polirte Metallfläche, die sich um den Strahl wie um eine Axe herumdrehen läſst, so erscheint das reflectirte Licht ungeändert, so lange die Reflexionsebene mit der ursprünglichen Polarisationsebene einen Winkel von 0°, 90°, 180°, 270° einschlieſst. In jedem anderen Azimuth hingegen tritt der reflectirte Strahl mit neuen Eigenschaften auf, und diese nehmen zu, wenn das Azimuth von 0° — 45°, von 90° — 135°, von 180° — 225°, oder von 270° — 315° wächst, und haben daher ihr Maximum bei dem Azimuthe 45°, 135°, 225° und 315°, nehmen aber wieder ab, wenn man das Azimuth von 45° auf 90°, von 135° auf 180°, von 225° auf 270°, oder von 315° auf 360° wachsen läſst.

Man denke sich nun eine polirte Stahlfläche im Azimuth — 45°, d. h. um 45° links gegen die Polarisationsebene geneigt, wo dem Vorhergehenden gemäſs die Wirkung ihr Maximum erreicht hat, und lasse in diesem Azimuth den Einfallswinkel sich ändern. So lange der Einfallswinkel groſs genug ist, und etwa 98°, 88° oder 87° hat, besteht die Wirkung des Metalls darin, die Po-

larisationsebene von der Rechten zur Linken zu wenden, gerade so, wie dieses ein durchsichtiger polarisirender Körper gethan haben würde. Dasselbe findet auch Statt, wenn der Einfallswinkel innerhalb 0° und 40° liegt. Über diese Grenze hinaus nimmt die Wirkung der reflectirenden Fläche ununterbrochen zu, bis sie bei 75° ihr Maximum erreicht; von 75° bis 87° wird sie aber wieder kleiner. Man kann sich leicht überzeugen, daſs von 75° bis 0° die Polarisationsebene vieler Strahlen von +45° bis 0° sich ändert.

Da wo die physische Wirkung der Stahlfläche ihren gröſsten Werth hat, nämlich bei 75°, besteht der reflectirte Strahl nicht mehr aus polarisirtem Lichte, denn er verschwindet nicht bei einer vollen Umdrehung eines Kalkspathrhomboëders, durch das man ihn leitet; er besteht auch nicht aus natürlichem Lichte, denn wird er von Neuem einer Reflexion unter 75° durch eine zweite Stahlfläche unterworfen, so zeigt er sich aus vollkommen in einer Ebene polarisirtem Lichte bestehend.

Um nun die Natur der Veränderung zu erforschen, die er erlitten hat, fange man ihn nach der Reflexion mit einem Kalkspathrhomboëder auf, so, daſs er längs der Axe durch dasselbe geht; da sieht man das System der farbigen Ringe wie durch eine dünne Krystallplatte geändert. Aus diesem Grunde betrachtete *Brewster* früher die Wirkung metallinischer Flächen wie die der Krystallplättchen, und weil er sich überzeugt hatte, daſs durch mehrere auf einander folgende Reflexionen die Farbenringe immer mehr an Reinheit und Entwickelung gewannen, so nahm er keinen Anstand, diesen Schluſs zu verallgemeinern, worin ihm auch *Biot* beistimmte. Doch irrte er hierin. Um seinen Fehler zu enthüllen, nimmt *Brewster* nun einen Lichtstrahl an, der in einem Azimuth von 45° polarisirt ist, und an parallelen Stahl-

flächen unter dem Einfallswinkel von 75° hinter einander zwei Reflexionen erlitten hat. Sollte die zweite Fläche dieselbe Wirkung hervorbringen, wie ein Krystallplättchen, so müfste sie die an der ersten Platte erzeugten Farben verdoppeln; allein die zweite Fläche polarisirt alles Licht des Strahles in einer Ebene, statt es in zwei unter rechten Winkeln polarisirte Bündel zu theilen. *Biot* glaubte diese Schwierigkeit dadurch zu lösen, dafs er die durch zwei Reflexionen erzeugte Farbe als Weifs der ersten Ordnung betrachtete. Hätte er das Licht nach 4, 6 oder 8 Reflexionen untersucht, so würde er es vollkommen polarisirt gefunden haben; ein Resultat, das sich mit der Annahme, die Ordnung der Farben wachse mit der Anzahl der Reflexionen, nicht vereinbaren läfst, indem es ausgemacht ist, dafs diese Reflexionen die Farben nur um eine Viertelstufe erhöhen können.

Da nun das im Azimuth von 45° polarisirte und unter dem Winkel der vollkommenen Polarisation reflectirte Licht weder den Charakter des natürlichen, noch den des polarisirten, endlich auch nicht den eines solchen an sich hat, das durch dünne Krystallplättchen gegangen ist, so erübriget nur noch, dasselbe mit dem circulär polarisirten zu vergleichen. Nach *Fresnel* erleidet ein polarisirter Lichtstrahl die circuläre Polarisation, wenn er unter dem Azimuth von + 45° zwei totale Reflexionen erlitten hat, erhält aber wieder den Charakter des gewöhnlichen polarisirten Lichtes mit einer Polarisationsrichtung von — 45°, wenn er zwei neuen Reflexionen dieser Art unter was immer für einem Azimuth unterworfen wird. Nach *Brewster* soll ein polarisirter Strahl, der im Azimuth von 45° von einem reinen oder mineralisirten Metalle unter dem vollkommenen Polarisationswinkel eine Reflexion erlitten hat, jenen Polarisationszustand annehmen, der zwischen dem des circu-

lären und jenem des geradlinig polarisirten die Mitte hält. Und wirklich erscheint ein polarisirter Lichtstrahl, der bei dem Azimuth von + 45° von einer Stahlfläche unter 75° reflectirt wird, und dann eine zweite Stahlfläche unter demselben Winkel trifft, nach der zweiten Reflexion wieder im polarisirten Zustande, sobald beide Flächen so gegen einander gestellt sind, daſs ihre Ebenen zusammen fallen, dann auf einander senkrecht stehen, d. h. wenn die Azimuthe 45°, 135°, 225° oder 315° betragen. In dem Azimuth 0° oder 180° erfolgt dieses nur bei einem Einfallswinkel von 80°, im Azimuth von 90° oder 270° bei einem von 70°, und in den zwischen liegenden Azimuthen werden auch Winkel erfordert, deren Werthe zwischen dem gerade genannten liegen. Demnach besitzt der vom Stahl reflectirte Strahl die allgemeinen Eigenschaften eines circulär polarisirten, unterscheidet sich aber von diesem dadurch, daſs er bei verschiedenem Azimuth verschiedene Einfallswinkel fordert, um in den ursprünglichen Polarisationszustand zurückgeführt zu werden.

Bei der circulären Polarisation besitzt der Lichtstrahl nach allen Seiten dieselbe Eigenschaft, und die Einfallswinkel, unter denen er in den gewöhnlichen Polarisationszustand zurückkehrt, sind für alle Seiten einander gleich, und unabhängig vom Azimuth, wie die Halbmesser eines Kreises, den man um den Strahl beschrieben hat, nach allen Seiten gleich sind, so daſs für einen solchen Strahl die Benennung: »circulär polarisirter,« ohne Beziehung auf die theoretische Ansicht, von der dieser Name eigentlich herstammt, völlig sachgemäſs ist. Aus demselben Gesichtspuncte und unabhängig von jeder weiteren Hypothese glaubt nun *Brewster*, geleitet durch die vorhin angeführten Thatsachen, für den neuen Polarisationszustand die Benennung *ellipti-*

*sche* Polarisation gebrauchen zu müssen, indem sich die Reflexionswinkel, unter denen der Strahl in den gewöhnlichen Polarisationszustand zurückgeführt wird, eben so mit dem Azimuth ändern, wie die Halbmesser einer Ellipse.

Bei der circulären Polarisation ist das Azimuth, unter welchem der Strahl auf seinen ursprünglichen Polarisationszustand zurückgeführt wird, — 45°; bei der elliptischen Polarisation hat es wohl auch einen negativen Werth, doch ist es stets kleiner als 45°, wie folgende Tafel zeigt:

| Name des Körpers. | Azimuth, in welchem die Regeneration eintritt. |
|---|---|
| Glas . . . . . . . . . . | 45° 0′ |
| Reines Silber . . . . . . | 39° 48′ |
| Gewöhnliches Silber . . . . | 36° 0′ |
| Feines Gold . . . . . . . . | 35° 0′ |
| Juwelirgold . . . . . . . . | 33° 0′ |
| Zinn, gekörntes *(grain tin)*. . | 33° 0′ |
| Messing . . . . . . . . . | 32° 0′ |
| Zinn, gewalztes *(tin plate)* . . | 31° 0′ |
| Kupfer . . . . . . . . . . | 29° 0′ |
| Quecksilber . . . . . . . . | 26° 0′ |
| Platin . . . . . . . . . . | 22° 0′ |
| Wismuth . . . . . . . . . | 21° 0′ |
| Spiegelmetall . . . . . . . | 21° 0′ |
| Zink . . . . . . . . . . | 19° 10′ |
| Stahl . . . . . . . . . . | 17° 0′ |
| Schwefelkies . . . . . . . | 14° 0′ (?) |
| Antimon . . . . . . . . . | 16° 15′ (?) |
| Arsenikkobalt . . . . . . . | 13° 0′ |
| Kobalt . . . . . . . . . . | 12° 30′ |
| Blei . . . . . . . . . . . | 11° 0′ |
| Bleiglanz . . . . . . . . . | 2° 0′ |
| Eisen *(fer spéculaire)* . . . . | 0° 0′ |

Die Ordnung, in welcher diese Körper auf einander folgen, ist gerade die umgekehrte jener, nach welcher dieselben Körper in der Reflexionsebene das Licht polarisiren. Bei den Versuchen war der Strahl ursprünglich in einer Ebene polarisirt, die um $+45^\circ$ gegen die Reflexionsebene geneigt war; nimmt aber das Azimuth ab, so nähert sich die Polarisationsebene des auf seinen ursprünglichen Polarisationszustand zurückgeführten Strahls der Reflexionsebene, und fällt endlich gar mit ihr zusammen, wenn das Azimuth auf $0^\circ$ herabgesunken ist. Wächst aber das Azimuth, so entfernt sich auch die Polarisationsebene des regenerirten Strahls von der Reflexionsebene, so dafs diese zwei Ebenen einen Winkel von $180^\circ$ einschliefsen, wenn das Azimuth $90^\circ$ beträgt.

Heifst $x$ die Neigung der Ebene der ursprünglichen Polarisation gegen die Reflexionsebene, d. i. das Azimuth, $\varphi$ das Azimuth des auf seinen ursprünglichen Polarisationszustand zurückgeführten Strahls, ist endlich $\vartheta$ der Werth von $\varphi$ für $x=45^\circ$, so gibt der Ausdruck

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}\,\vartheta\ \text{tang.}\,x$$

die durch Erfahrung mittelst einer reinen Silberplatte gefundene Relation dieser Gröfsen hinreichend genau an. Es ist die ganze Änderung der Polarisationsebene $R$ gleich $x+\varphi$.

Da nun ein polarisirter Strahl durch Reflexion von einer Stahlplatte unter dem Winkel von $75^\circ$ bei einer Neigung der Reflexionsebene gegen die Polarisationsebene die elliptische Polarisation erlangt, und durch eine neue Reflexion unter demselben Winkel bei einer Neigung der Reflexionsebene gegen die Polarisationsebene von $-17^\circ$ den Zustand des polarisirten Lichtes annimmt; so ist klar, dafs derselbe durch eine dritte Reflexion wieder elliptisch polarisirt wird, durch eine vierte aber bei einem Azimuth, das kleiner als $17^\circ$ ist, wieder den Cha-

rakter des gewöhnlich polarisirten Lichtes annimmt, u. s. f. Bei der circulären Polarisation ist das Azimuth $\varphi$ immer $\mp 45^\circ$, es mögen so viele Reflexionen auf einander folgen, als man will. Für 50 derselben hat *Brewster* den Versuch angestellt, und sein Resultat dieser Behauptung gemäfs befunden. Nach $n$ auf einander folgenden Regenerationen wird der Werth des Winkels $\varphi$ durch die Formel

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}^n\, x$$

ausgedrückt.

Betrachtet man nun das natürliche Licht als bestehend aus zwei unter einem rechten Winkel polarisirten Hälften, deren Azimuth rechts und links von der Reflexionsebene $45^\circ$ beträgt, und läfst dieses Licht unter $75^\circ$ auf eine Stahlplatte fallen; so erhält man nach zwei Reflexionen einen Strahl, der sich aus zwei unter den Azimuthen $+17^\circ$ und $-17^\circ$ polarisirten Theilen bestehend ansehen läfst, nach der dritten und vierten Reflexion betragen diese Azimuthe $\pm 5^\circ\, 22'$, nach der fünften und sechsten $\mp 1^\circ\, 38'$, nach der siebenten und achten $\pm 0^\circ\, 30'$. Es wird demnach ein natürlicher Strahl durch acht auf einander folgende Reflexionen auf einer Stahlfläche fast vollkommen polarisirt. Von einer Silberplatte müfste ein Strahl 36 Reflexionen erlitten haben, um ihn dahin zu bringen, dafs die Polarisationsebenen seiner Theile nur um $47'$ gegen einander geneigt wären, uud daher kommt es, dafs Silber das Licht nicht zu polarisiren scheint, wiewohl dieses von einer Stahlfläche leicht geschieht. Was nun die durch zwei Reflexionen des natürlichen Lichtes polarisirte Lichtmenge anbelangt, so darf man nur bemerken, dafs z. B. durch Silber das Azimuth von $45^\circ$ auf $17^\circ$ gebracht wird, und gerade diese Änderung des Azimuths hätte *eine* Reflexion auf Glas unter dem Einfallswinkel von $45^\circ$ oder $68^\circ$ her-

vorgebracht. Man kann demnach die Menge des durch Silber polarisirten Lichtes eben so berechnen, wie die durch Glas unter den genannten Einfallswinkeln, und sich demnach der Formel $Q = 1 - 2 \sin.^2 \varphi$ (siehe S. 499 des VIII. Bandes) bedienen, um diese Lichtmenge zu berechnen. Da $\varphi = 17^0$ ist, so wird $Q = 0.829$.

Bis hieher wurde die elliptische Polarisation unter dem Einfallswinkel des Maximums der Polarisation betrachtet. Bei anderen Incidenzen mufs man die Formel

$$\text{tang.}\, \varphi = \frac{\cos.\ (i + i')}{\cos.\ (i - i')}$$

zu Hülfe nehmen, um das Azimuth $\varphi$ der neuen Polarisationsebene zu bestimmen. Sucht man darnach die Incidenzwinkel, welche dem polarisirten Strahl gegeben werden müssen, damit ihn zwei parallele Stahlplatten durch eine bestimmte Anzahl von Reflexionen auf den ursprünglichen Polarisationszustand zurückführen, so erhält man folgende Resultate:

| Einfallswinkel, | | Zahl der Reflexionen zur Regeneration des Polarisationszustandes | |
|---|---|---|---|
| beobachtet. | berechnet. | bei der geradlinigen Polarisation. | bei der elliptischen Polarisation. |
| 86° 0′ | 85° 45′ | 6, 12, 18 etc. | 3, 9, 15 etc. |
| 84° 0′ | 84° 38′ | 5, 10, 15 etc. | 2½, 7½, 12½ etc. |
| 82° 20′ | 83° 30′ | 4, 8, 12 etc. | 2, 6, 10 etc. |
| 79° 0′ | 79° 39′ | 3, 6, 9 etc. | 1½, 4½, 7½ etc. |
| 75° 0′ | 75° 00′ | 2, 4, 6 etc. | 1, 3, 5 etc. |
| 67° 40′ | 68° 53′ | 3, 6, 9 etc. | 1½, 4½. 7½ etc. |
| 60° 20′ | 60° 2′ | 4, 8, 12 etc. | 2, 6, 10 etc. |
| 56° 25′ | 56° 5′ | 5, 10, 15 etc. | 2½, 7½, 12½ etc. |
| 52° 20′ | 51° 24′ | 6, 12, 18 etc. | 3, 6, 9 etc. |

Es gibt demnach für dieselbe Anzahl der Reflexionen zwei Winkel, unter welchen die völlige Wieder-

herstellung des ursprünglichen Polarisationszustandes eintritt, wo daher auch $\varphi$ denselben Werth erhält; einer derselben ist kleiner, der andere gröſser als der Winkel des Maximums. Für eine gerade Anzahl Reflexionen, die den ursprünglichen Polarisationszustand wieder herstellen, tritt die elliptische Polarisation mit einer ungeraden Anzahl Reflexionen ein; erlangt aber das Licht seinen ursprünglichen Charakter durch eine ungerade Anzahl Reflexionen, so wird es wieder nach einer ganzen Anzahl Reflexionen, vermehrt um eine halbe Reflexion, elliptisch polarisirt. Hier entsteht und vergeht daher der Zustand der elliptischen Polarisation beim Act der Reflexion selbst, und man kann annehmen, dieser Polarisationszustand sey vollkommen erzeugt, wenn der Lichtstrahl auf die gröſste Tiefe in die reflectirende Fläche eingedrungen ist.

Die Differenz $P$ in der Gröſse der zwei Einfallswinkel, bei welchen die elliptische Polarisation vollkommen eintritt, wird durch die Formel

$$P = 90^0 - 2\varphi$$

ausgedrückt. Für den Stahl hat man überdieſs

$$\frac{\sin. i}{\sin. i'} = 3.732.$$

Man ist daher im Stande, das Azimuth $\varphi$ der Polarisationsebene gegen die Reflexionsebene zu berechnen.

Unterwirft man einen Lichtstrahl einer Reihe von Reflexionen unter Winkeln, die zwar in Betreff ihres Einflusses auf die elliptische Polarisation einerlei Werth haben, deren aber einer gröſser, der andere kleiner ist als 75°, so heben sich die Wirkungen einander auf, und der Strahl erlangt zuletzt den gewöhnlichen Polarisationszustand.

In allem Vorhergehenden ist vorausgesetzt worden, daſs die zwei Ebenen der successiven Reflexionen mit

einander zusammenfallen. Ändert man aber die Lage der zweiten Reflexionsebene gegen die erste, so wird der Lichtstrahl in den Zustand der elliptischen Polarisation versetzt, und wieder auf den ursprünglichen Polarisationszustand zurückgeführt, aber der Winkel, unter welchem dieses geschieht, ist z. B. bei Stahl nicht wie vorhin 75°, sondern er hat folgenden Werth:

| Azimuth der zweiten Reflexionsebene | Winkel der Regeneration. | Complement dieses Winkels, | |
|---|---|---|---|
| | | beobachtet. | berechnet. |
| 0° und 180° | 75° | 15° | 14°.9 |
| 22.5 » 202.5 | 77 | 13 | 12.7 |
| 45 » 225 | 78 | 12 | 12 |
| 67.5 » 247.5 | 77¾ | 12¼ | 12.7 |
| 90 » 270 | 75 | 15 | 14.9 |
| 112.5 » 292.5 | 70 | 20 | 19 |
| 135 » 315 | 68 | 22 | 22 |
| 157.5 » 337.5 | 70 | 20 | 19 |
| 180 » 360 | 75 | 15 | 14.9 |

Nimmt man das Complement des Regenerationswinkels als Radius Vector, die Azimuthe aber als Winkel der Polarcoordinaten an, so geben die Beobachtungsresultate dieser Tabelle gemäſs eine Ellipse, deren halbe kleine Axe 12 dem Azimuthe 45°, und deren halbe groſse 22 dem Azimuthe 135° entspricht. Diese Ellipse nähert sich einem Kreise desto mehr, je näher das angewendete Metall dem Anfange der oben angegebenen Körperreihe steht. Heiſst nämlich $\beta$ das Azimuth der Regeneration nach zwei Reflexionen, $a$ die halbe Gröſse, und $b$ die halbe kleine Axe der Ellipse, so hat man die Proportion

$$a : b = \sin. 2\beta : 1;$$

und da für Silber $\beta = 39° 48'$ ist, so wird das Verhältniſs der zwei Axen 1 : 0.9835.

Es ist interessant, die Gestalt und Lage der Ellipse für Winkel zu untersuchen, welche *über* oder *unter* dem des Maximums der Polarisation stehen. Solche Resultate enthält die folgende Tafel für Einfallswinkel von 80° und 68°, das Azimuth der zweiten Reflexionsebene gegen die erste rechts oder links von derselben gerechnet.

| Azimuth. | Einfallswinkel von 80°. Complement des Regenerationswinkels zur Rechten. | Einfallswinkel von 80°. Complement des Regenerationswinkels zur Linken. | Einfallswinkel von 68°. Complement des Regenerationswinkels zur Rechten. | Einfallswinkel von 68°. Complement des Regenerationswinkels zur Linken. |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 23° | 23° | 11° | 11° |
| 11¼ | 25 | 20 | 24 | 10 |
| 22½ | 26 | 16⅓ | 24½ | 9 |
| 33¾ | 24 | 13 | 25½ | 9¾ |
| 45 | 20½ | 11½ | 26⅓ | 11½ |
| 56¼ | 18 | 10 | 25⅓ | 15 |
| 67½ | 15⅓ | 9½ | 20 | 18 |
| 78¾ | 11 | 9¾ | 21 | 20 |
| 90 | 10 | 10 | 22 | 22 |

Aus allem diesen folgt nun folgende Charakteristik der Ellipse:

| Einfallswinkel. | Verhältnifs der Axen. | Charakter der Ellipse. | Azimuth der grofsen Axe. |
|---|---|---|---|
| 0° | 0 : 90 | gerade Linie. | 90° u. 270° |
| 68° | 9 : 26 | Ellipse. | 45° » 56° rechts. |
| 75° | 12 : 22 | detto. | — 45° do. |
| 80° | 9½ : 26 | detto. | — 22° ½ do. |
| 90° | 0 : 90 | gerade Linie. | — 0° |

Die Lage der grofsen Axe wird durch $45 \mp \varphi$ gegeben. Ist der Einfallswinkel für die erste Ebene $x$, so ist der Radius der Ellipse bei den Azimuthen 90° und 270° stets $90^0 - x$, und der bei den Ellipsen 0° und

180° das Complement des Einfallswinkels, wo $\varphi$ mit $x$ einerlei Werth hat, und dadurch ist die Gestalt und Lage der Ellipse vollkommen bestimmt.

Das Vorhergehende setzt voraus, dafs sich die ursprüngliche Polarisationsebene des Strahls um 45° rechts von der ersten Reflexionsebene befindet. *Aendert sich diese Lage*, so erfährt der regenerirte Strahl in den Azimuthen 0°, 90°, 180° und 270° keine Veränderung, bei jedem anderen Azimuth der zweiten Reflexionsebene hingegen werden die Regenerationswinkel kleiner, so lange die Neigung der Polarisationsebene zwischen 45° und 0° wechselt, und gröfser, wenn diese sich zwischen 45° und 90° befindet.

Wendet man zwei reflectirende Körper *von verschiedener Natur* an, wie z. B. Stahl und Silber, so ist für den Fall der Regeneration des Strahls die Neigung der zweiten Reflexionsebene gegen die erste die mittlere arithmetisch proportionirte zwischen den Neigungen, welche jeder Einzelne dieser Körper fordert.

*Brewster* bemerkt, dafs die durch mehrere Reflexionen in Glas erzeugte circuläre Polarisation stets durch eine oder mehrere Reflexionen an Metallen in eine geradlinige verwandelt werden kann, sobald letztere nur bei kleinern Incidenzen vor sich gehen, als das Maximum der Polarisation beträgt, und die Reflexionsebenen für Glas und Metall einerlei Lage haben. Combinirt man eine Reflexion auf Stahl mit zwei totalen unter 54° 1/2 in Glas, so ist das Azimuth der Regeneration nahe 30° 1/2, mithin das arithmetische Mittel zwischen dem Azimuth 45° für Glas und 17° für Stahl.

*Aendert man das Azimuth* der Metallfläche, auf welche der circulär polarisirte Strahl fällt, so findet man, dafs, falls dasselbe auf 90° gebracht ist, bei einem Einfallswinkel, der gröfser als 80° ist, die circuläre Pola-

risation durch *eine* Reflexion auf Metall ersetzt wird. Geht das Azimuth gegen Null zu, so wird der Einfallswinkel, für welchen diese Compensation eintritt, kleiner, und diese Verminderung geht in eine Function der Incidenz über, bei welcher die totale Reflexion eintritt. Man kann demnach die circuläre Polarisation mittelst Metallen hervorbringen, und dadurch Phänomen ins Daseyn rufen, die sich vielleicht auf anderen Wegen gar nicht erzielen lassen, die aber eine eigene Betrachtung verdienen.

* * *

Dieses ist der wesentliche Inhalt der zwei ersten Abtheilungen dieses wichtigen Aufsatzes des gelehrten Edinburger Physikers. Die dritte Abtheilung soll im nächsten Hefte folgen.

# Meteorologische Beobachtungen. Jänner 1831.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

| Tag. | Um 8 Uhr früh. Barometer o° R. | Thermometer. | Wind. | Um 3 Uhr Nachmittag. Barometer o° R. | Thermometer. | Wind. | Um 10 Uhr Abends. Barometer o° R. | Thermometer. | Wind. | Witterung. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Paris. Z | Grad R. | | Paris. Z. | Grad R. | | Paris. Z, | Grad R. | | |
| 1 | 27.350 | 1.0 | S. still. | 27.345 | 2.0 | NW schw. | 27.473 | — 0.5 | NW. schw. | Sonne mit Wolken. |
| 2 | 27.592 | 2.0 | NW. schw. | 27.605 | 3 0 | NW. still. | 27.649 | 1.8 | W. schwach. | Trüb. |
| 3 | 27.670 | 2.0 | NW schw. | 27 678 | 2.0 | N. still. | 27 715 | 1.5 | S. still. | Sonne mit Wolken. |
| 4 | 27.698 | 2.0 | S. still. | 27.676 | 3.0 | S. still. | 27.637 | 1.8 | SSW. still. | Trüb. |
| 5 | 27.570 | 2.0 | W. still. | 27.499 | 2 0 | S. schwach. | 27.458 | 0.5 | S. still. | Trüb. |
| 6 | 27.462 | — 1.0 | S. still | 27.366 | 0.0 | N. schwach. | 27.429 | — 1.0 | N. schwach. | Trüb und Schnee. |
| 7 | 27.695 | — 1.0 | N. schwach. | 27.885 | — 3.0 | N. stark. | 27.982 | — 4.8 | NW. mittelm. | Sonne mit Wolken. |
| 8 | 28.084 | — 5.5 | NW. schw. | 28.063 | — 4.0 | NW. schw. | 28 064 | — 6 2 | NW. schw. | Heiter. |
| 9 | 27.852 | — 8.6 | W. schwach. | 27.508 | — 4.0 | S. still. | 27 458 | — 6.0 | W. schwach. | Sonne mit Wolken. |
| 10 | 27.285 | — 0.8 | W. schwach. | 27.330 | 0 2 | W. mittelm. | 27.448 | — 2.0 | W. schwach. | Sonne m. W. u. Schnee. |
| 11 | 27.567 | — 8.0 | W. still. | 27.530 | — 5.0 | N. still. | 27.538 | — 7.5 | NNW. still. | Sonne mit Wolken. |
| 12 | 27.445 | — 4.3 | W. schwach. | 27.426 | — 2 8 | W. mittelm. | 27.465 | — 3 0 | W. schwach. | Trüb. |
| 13 | 27 457 | — 2.0 | WNW. schw. | 27.458 | — 1.0 | WNW. schw. | 27 566 | — 1.0 | W. schwach. | Trüb und Schnee. |
| 14 | 27.505 | — 1.0 | W. schwach. | 27.500 | 1.0 | WNW. schw. | 27.524 | — 1.0 | WNW. schw. | Sonne mit Wolken. |
| 15 | 27.663 | 0.0 | W. mittelm. | 27.662 | 0.2 | NW. schw. | 27.677 | — 3.0 | NW. schw. | Sonne mit Wolken. |
| 16 | 27.662 | — 7.0 | NW. schw. | 27.642 | — 2.0 | SO. schwach. | 27.658 | — 3 0 | OSO. schw. | Sonne mit Wolken. |
| 17 | 27.643 | — 3.3 | SO. schwach. | 27.601 | — 2.8 | OSO. mitt. | 27.574 | — 3 0 | SO. schwach. | Trüb. |
| 18 | 27.554 | — 2 8 | S still. | 27 522 | — 0.4 | S. still. | 27.532 | — 1.0 | S. still. | Trüb. |
| 19 | 27.543 | — 1.0 | SO. still. | 27.523 | 0.0 | N. schwach. | 27.545 | — 1.0 | NNO. schw. | Trüb. |
| 20 | 27.546 | — 2.0 | NO. schwach. | 27.513 | — 2.3 | NO. schw. | 26.540 | — 3.0 | NO. schwach. | Trüb. |
| 21 | 27.546 | — 5 6 | OSO. mitt. | 27.442 | — 3.0 | SSO. schw. | 27.413 | — 4 5 | SSO. stark. | Sonne mit Wolken. |
| 22 | 27 371 | — 4 6 | SSO. mitt. | 27.306 | — 3 0 | OSO. stark. | 27.290 | — 4.0 | OSO. schw. | Sonne mit Wolken. |
| 23 | 27 241 | — 4.8 | OSO. schw. | 27 251 | — 2.6 | SSO. schw. | 27.267 | — 5.0 | SO. schwach | Sonne mit Wolken. |
| 24 | 27.224 | — 4.0 | SO. mittelm. | 27.270 | — 3.8 | SO. mittelm. | 27.135 | — 4.0 | SO. schwach. | Trüb. |
| 25 | 27.047 | — 2.0 | S. mittelm. | 27.045 | — 3 6 | WSW. still. | 27 211 | — 4.0 | WSW. schw. | Trüb. |
| 26 | 27.222 | — 2.6 | WNW. mitt. | 27.320 | — 4.5 | NW. stark. | 27 434 | — 6 0 | NW. schw. | Strk. Wind, Schneegest. |
| 27 | 27.499 | — 6.0 | NW. schw. | 27 454 | — 2.6 | NW. schw. | 27.406 | — 4.0 | NW. schw. | Sonne mit Wolken. |
| 28 | 27.093 | — 7.2 | SO. schwach. | 26.954 | — 1.8 | SO. still. | 26.942 | — 4.5 | SO. schwach. | Sonne mit Wolken. |
| 29 | 27 084 | — 5.8 | NW. schw. | 27.166 | — 2.6 | WNW. schw. | 27 253 | — 5.0 | WNW. schw. | Sonne mit Wolken. |
| 30 | 27.278 | — 7.0 | NW. schw. | 27.334 | — 5 0 | NNW. schw | 27.350 | — 6.0 | NNW. schw. | Sonne mit Wolken. |
| 31 | 27.449 | — 8.8 | N. mittelm. | 27.461 | — 5.8 | WNW. mitt. | 27.507 | — 7 0 | NW. schw. | Sonne mit Wolken. |
| Mittel | 27.481 | — 3.15 | | 27.462 | — 1.69 | | 27.488 | — 3.08 | | |

Mittel aus dem täglichen Maximum und Minimum der Temperatur . . = 3.35.

# Meteorologische Beobachtungen. Februar 1831.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

| Tag. | Um 8 Uhr früh. Barometer o° R. | Thermometer. | Wind. | Um 3 Uhr Nachmittag. Barometer o° R. | Thermometer. | Wind. | Um 10 Uhr Abends. Barometer o° R. | Thermometer. | Wind. | Witterung. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Paris. Z. | Grad R. | | Paris. Z. | Grad R. | | Paris. Z. | Grad. R. | | |
| 1 | 27.536 | —12.0 | SSW. still. | 27.525 | — 7.0 | OSO. still. | 27.524 | —10.3 | OSO. still. | Sonne mit Wolken. |
| 2 | 27.454 | —13.0 | OSO. schw. | 27.377 | — 7.0 | OSO. mitt. | 27.394 | — 7.0 | S. still. | Sonne mit Wolken. |
| 3 | 27.536 | — 4.0 | S. schwach. | 27.608 | — 1.8 | SO. schwach. | 27.568 | — 2.0 | SO. schwach. | Schnee und trüb. |
| 4 | 27.414 | — 1.8 | SO. schwach. | 27.398 | 0.0 | NW. schw. | 27.385 | — 0.5 | NW. still. | Trüb. |
| 5 | 27.459 | 1.0 | S. still. | 27.304 | 4.0 | SO. schwach. | 27.324 | 2.0 | WNW. schw. | Trüb. |
| 6 | 27.443 | 3.0 | WNW. mitt. | 27.485 | 3.0 | W. schwach. | 27.602 | 0.0 | W. schwach. | Sonne mit Wolken. |
| 7 | 27.630 | — 1.3 | SW. still. | 27.571 | 4.0 | S. schwach. | 27.642 | 2.0 | SW. schw. | Trüb und Regen. |
| 8 | 27.819 | 2.0 | SW. still. | 27.873 | 5.0 | NNO. still. | 27.934 | 3.0 | NNO. still. | Sonne mit Wolken. |
| 9 | 27.987 | 2.0 | NNO. still. | 28.030 | 4.0 | SSW. schw. | 28.093 | 2.0 | SW. still. | Trüb. |
| 10 | 28.065 | 1.0 | SW. still. | 28.046 | 6.0 | S. still. | 28.030 | 1.8 | SW. still. | Trüb. |
| 11 | 27.937 | 0.0 | SW. still. | 27.817 | 12.0 | WNW. stark. | 27.794 | 8.0 | WNW. mitt. | Sonne mit Wolken. |
| 12 | 27.700 | 8.0 | WNW. mitt. | 27.632 | 12.0 | WNW. mitt. | 27.672 | 4.8 | WNW. mitt. | Sonne mit Wolken. |
| 13 | 27.690 | 3.2 | WNW. stark. | 27.750 | 3.0 | NW. stark. | 27.783 | 1.0 | NW. mittelm. | Trüb. |
| 14 | 27.798 | 0.0 | NW. schw. | 27.840 | 1.0 | NW. mitt. | 27.859 | 0.0 | NW. schw. | Trüb. |
| 15 | 27.910 | — 0.8 | NW. schw. | 27.892 | 1.8 | ONO. still. | 27.851 | — 1.5 | ONO. still. | Sonne mit Wolken. |
| 16 | 27.828 | — 2.8 | WNW. still. | 27.790 | 0.0 | SSW. still. | 27.725 | — 1.0 | SW. still. | Trüb. |
| 17 | 27.633 | 0.0 | OSO. schw | 27.564 | 4.0 | WNW. schw. | 27.490 | 2.0 | WNW. still. | Trüb. |
| 18 | 27.564 | 2.8 | WNW. schw. | 27.549 | 4.0 | WSW. schw. | 27.608 | 2.0 | WSW. schw. | Trüb. |
| 19 | 27.660 | 1.4 | WNW. schw. | 27.589 | 6.0 | SO. schwach | 27.578 | 3.0 | SO. schwach | Sonne mit Wolken. |
| 20 | 27.420 | 0.0 | S. still. | 27.296 | 0.4 | SSW. schw. | 27.268 | — 0.5 | SW. schwach. | Trüb und Schnee. |
| 21 | 27.274 | 0.0 | W. schwach. | 27.326 | 0.0 | NW. schw. | 27.371 | — 0.5 | NW. schw. | Sonne mit Wolken. |
| 22 | 27.407 | — 1.1 | NW. schw. | 27.447 | — 0.2 | NNW. mitt | 27.518 | — 1.0 | NNW. schw. | Trüb und Schnee. |
| 23 | 27.550 | — 1.0 | NNW. schw. | 27.606 | — 0.5 | NW. stark. | 27.664 | — 1.8 | NW. mittelm. | Trüb und Schnee. |
| 24 | 27.694 | — 2.0 | WNW. mitt. | 27.696 | — 0.8 | NW. mittelm. | 27.663 | — 1.5 | NW. mittelm. | Sonne mit Wolken. |
| 25 | 27.607 | — 0.8 | W. schwach. | 27.525 | 3.0 | W. schwach. | 27.499 | 1.8 | W. schwach. | Sonne mit Wolken. |
| 26 | 27.374 | 2.0 | WSW. still. | 27.307 | 6.0 | WNW. stark. | 27.208 | 1.5 | WSW. schw. | Sonne mit Wolken. |
| 27 | 27.095 | 1.5 | N. still. | 27.213 | 5.0 | W. schwach. | 27.164 | 2.0 | NW. schw. | Sonne mit Wolk. u. Reg. |
| 28 | 27.010 | 4.0 | WNW. schw. | 27.080 | 4.0 | WNW. mitt. | 27.134 | 3.3 | W. mittelm. | Sonne mit Wolk. u. Reg. |
| Mittel | 27.589 | — 0.49 | | 27.577 | 2.54 | | 27.583 | — 0.46 | | |

Mittel aus dem täglichen Maximum und Minimum der Temperatur . . = 0.02.

# Meteorologische Beobachtungen. März 1831.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

| Tag. | Um 8 Uhr früh. Barometer 0° R. | Thermometer. | Wind. | Um 3 Uhr Nachmittag. Barometer 0° R. | Thermometer. | Wind. | Um 10 Uhr Abends. Barometer 0° R. | Thermometer. | Wind. | Witterung. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Paris. Z. | Grad R. | | Paris. Z. | Grad R. | | Paris. Z. | Grad R. | | |
| 1 | 27.253 | 2.0 | W. mittelm. | 27.233 | 5.3 | W. stark. | 27.308 | 2.0 | W. stark. | Sonne mit Wolken. |
| 2 | 27.388 | 0.2 | WNW. stark. | 27.454 | 4.0 | WNW. mitt. | 27.468 | 2.0 | W. schwach. | Sonne mit W. u. Schnee. |
| 3 | 27.268 | 3.0 | WNW. schw. | 27.206 | 5.8 | WNW. mitt. | 27.212 | 4.5 | W. Sturm. | Regen. |
| 4 | 27.303 | 6.4 | W. schwach. | 27.362 | 8.0 | WNW. mitt. | 27.398 | 3.0 | WNW. mitt. | Sonne m. Wolk. u. Reg. |
| 5 | 27.508 | 5.0 | WNW. schw. | 27.532 | 7.0 | NW. schw. | 27.548 | 2.8 | NO still. | Sonne mit Wolken. |
| 6 | 27.418 | 3.0 | SO. schwach. | 27.291 | 5.8 | SW. schwach. | 27.293 | 2.5 | SO. schwach. | Trüb und Regen. |
| 7 | 27.257 | 3.0 | S. schwach. | 27.270 | 8.5 | W. schwach. | 27.367 | 5.8 | W. schwach. | Trüb und Regen. |
| 8 | 27.398 | 7.0 | WNW. schw. | 27.437 | 9.0 | WNW. schw. | 27.474 | 5.5 | W. schwach. | Sonne mit Wolken. |
| 9 | 27.458 | 5.0 | S. still. | 27.428 | 8.0 | N. still. | 27.394 | 5.0 | WNW. schw. | Sonne m. Wolk. u. Reg. |
| 10 | 27.418 | 5.0 | S. still. | 27.458 | 8.0 | NNO. schw. | 27.522 | 4.8 | WNW. schw. | Sonne mit Wolken. |
| 11 | 27.583 | 5.0 | W. schwach. | 27.601 | 7.0 | WNW. schw. | 27.550 | 3.0 | W. schwach. | Sonne mit Wolken. |
| 12 | 27.552 | 1.0 | WNW. schw. | 27.513 | 5.8 | NO. schw. | 27.530 | 3.0 | W. schwach. | Sonne mit Wolken. |
| 13 | 27.513 | 4.5 | W. schwach. | 27.474 | 6.0 | WNW. schw. | 27.547 | 4.4 | W. schwach. | Sonne m. Wolk. u. Reg. |
| 14 | 27.518 | 4.0 | WSW. schw. | 27.474 | 11.8 | W. schwach. | 27.448 | 6.0 | W. schwach. | Sonne mit Wolken. |
| 15 | 27.463 | 5.0 | W. schwach. | 27.472 | 8.0 | WNW. schw. | 27.483 | 4.0 | W. mittelm. | Sonne m. Wolk. u. Reg. |
| 16 | 27.404 | 6.0 | WNW. schw. | 27.176 | 8.0 | NW. stark. | 27.122 | 7.0 | NW. stark. | Regen. |
| 17 | 27.298 | 5.0 | NW. mittelm. | 27.389 | 8.0 | WNW. stark. | 27.373 | 5.8 | WNW. mitt. | Trüb und Regen. |
| 18 | 27.371 | 6.0 | WNW. mitt | 27.378 | 9.0 | NW. stark. | 27.430 | 5.0 | WNW. mitt. | Sonne m. Wolk. u. Reg. |
| 19 | 27.426 | 4.0 | W. mittelm. | 27.382 | 6.0 | WNW. mitt. | 27.431 | 3.1 | WNW. mitt. | Nebel, Schnee u. Regen. |
| 20 | 27.486 | 1.0 | W. schwach. | 27.522 | 3.0 | NNW. schw. | 27.533 | 1.8 | NW. schw. | S. m. W., Schn. u. Reg. |
| 21 | 27.537 | 2.0 | WNW. schw. | 27.533 | 4.0 | NNW. schw. | 27.570 | 1.0 | NW. schw. | Sonne mit Wolken. |
| 22 | 27.583 | 0.0 | WNW. schw. | 27.611 | 1.0 | NW. stark. | 27.634 | — 1.0 | NW. mittelm. | S. mit Wolk. u. Schnee. |
| 23 | 27.566 | — 0.5 | NW. mittelm. | 27.512 | — 1.0 | N. mittelm. | 27.535 | — 2.0 | N. schwach. | Trüb und Schnee. |
| 24 | 27.581 | — 2.8 | NW. still. | 27.611 | 3.0 | SO. mittelm. | 27.586 | 1.3 | SO. schwach. | Sonne mit Wolken. |
| 25 | 27.542 | 1.2 | OSO. mitt. | 27.539 | 3.0 | S. mittelm. | 27.547 | 1.8 | S. mittelm. | Trüb und Schnee. |
| 26 | 27.567 | 3.3 | S. mittelm. | 27.637 | 6.0 | SO. stark. | 27.664 | 2.9 | SO. mittelm. | Sonne mit Wolken. |
| 27 | 27.634 | 3.0 | OSO. schw. | 27.622 | 8.0 | OSO. stark. | 27.662 | 3.7 | SO. mittelm. | Sonne mit Wolken. |
| 28 | 27.667 | 2.8 | OSO. schw. | 27.633 | 5.0 | SO. schwach. | 27.610 | 2.8 | SO. schwach. | Trüb. |
| 29 | 27.613 | 3.8 | SO. still. | 27.609 | 8.0 | SSO. still | 27.609 | 4.8 | W. still. | Trüb und Regen. |
| 30 | 27.643 | 6.0 | W. still. | 27.640 | 9.0 | WNW. still. | 27.650 | 5.8 | NW. still. | Trüb. |
| 31 | 27.674 | 5.0 | NNW. schw. | 27.660 | 9.0 | NNW. schw. | 27.687 | 5.0 | NNW. schw. | Trüb. |
| Mittel | 27.480 | 3.39 | | 27.473 | 6.36 | | 27.490 | 3.45 | | |

Mittel aus dem täglichen Maximum und Minimum der Temperatur . . = 3.99.

Fig. 30.

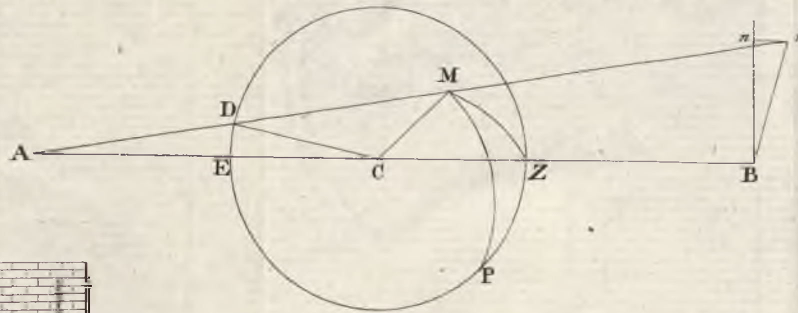



Fig. 31.

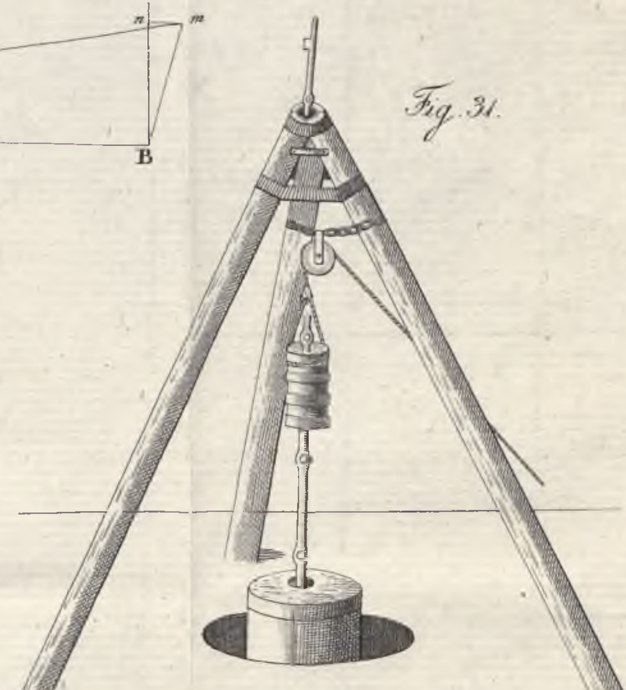


Fig. 29.

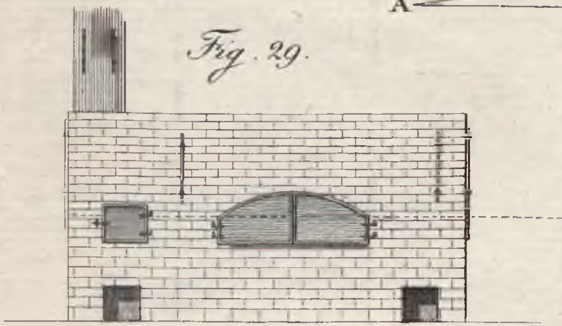


Fig. 28.

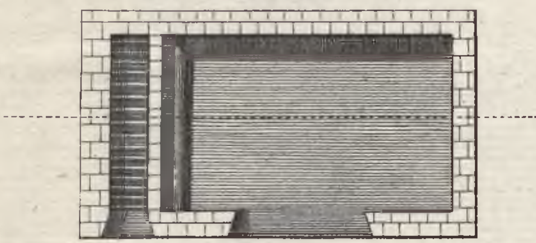


Fig. 27.

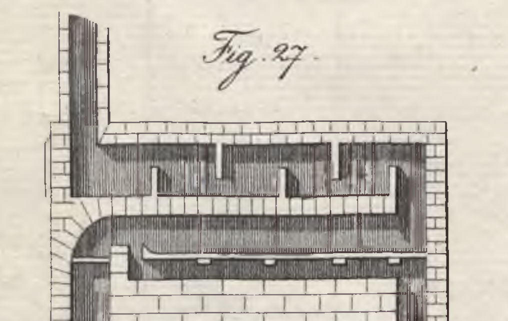
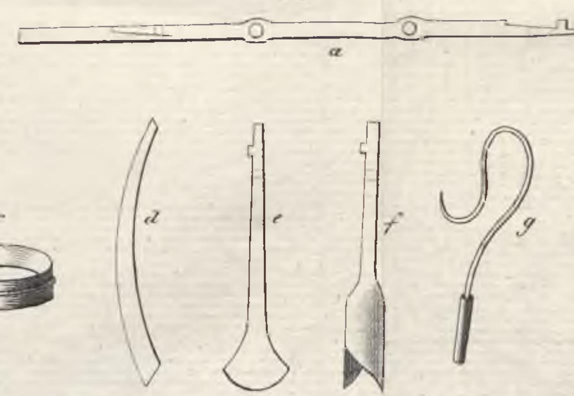


Fig. 32.




M. Bauer sc.